幾何学概論第二 (MTH.B212)

曲面論の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/01/20

第一基本行列・第二基本行列

正則曲面 $p(u,v)$ の単位法ベクトル場 $\nu(u,v)$ をとっておく： C^∞

$\cap \mathbb{R}^3$

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix},$$

$$\widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

$$p_u \cdot \nu_v = (p_u \cdot \nu)_v - p_{uv} \cdot \nu = -p_{uv} \cdot \nu$$

- $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ は対称行列.
- $\widehat{I}$ は正値，すなわちすべての固有値は正．とくに $\det \widehat{I} > 0$.

ガウス曲率・平均曲率

$$A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{I\!I} \qquad \text{(ワインガルテン行列)}$$

- A の固有値はパラメータのとり方によらない実数（主曲率）.
- ワインガルテンの公式 $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$.

$$K := \det A \quad \text{(ガウス曲率)}, \qquad H := \frac{1}{2}\operatorname{tr} A \quad \text{(平均曲率)}$$

法曲率

定義

- $\boldsymbol{v} = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$：曲面の P における接ベクトル
- $\gamma(t)$：曲面上の弧長 t をパラメータとする曲線で $\gamma(0) = \mathrm{P}$, $\dot\gamma(0) = \boldsymbol{v}$ となるもの

$\gamma(t) = p(u(t), v(t))$

このとき γ の $t = 0$ における法曲率 $\gamma'' \cdot \nu$ を
曲面の点 P における $\boldsymbol{v}$ 方向の法曲率とよび $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ とかく

($\ddot u$ $\ddot v$ によらない)

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2,$$

$$\text{ただし} \quad E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = 1.$$

定理

曲面上の点 P における法曲率の最大値・最小値は主曲率である.

主方向

定義

- $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ が主曲率となるとき $\boldsymbol{v}$ の方向を主方向とよぶ.
- $\kappa_n(\boldsymbol{v}) = 0$ なるとき $\boldsymbol{v}$ の方向を漸近方向とよぶ.

命題

主曲率 λ に対応する主方向のベクトルを

$$\boldsymbol{v} = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$$

と書くと, ${}^t(\alpha, \beta)$ は A の λ-固有ベクトル.

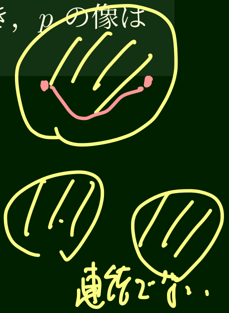
問題 4-1

$\begin{cases} \text{連結：(弧状)連結} \\ \text{開集合} \end{cases}$ ひとつづき

問題

D は $\mathbb{R}^2$ の領域

正則曲面 $p\colon D \to \mathbb{R}^3$ のすべての点が臍点であるとき，p の像は平面か球面の一部であることを示しなさい．



$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda: D\text{上の関数}$$

ワインガルテンの式

$$(\nu_u \ \ \nu_v) = -(p_u \ \ p_v)A$$
$$= -(\lambda p_u \ \ \lambda p_v)$$

$$\nu_u = -\lambda p_u \Rightarrow \nu_{uv} = -\lambda_v p_u - \lambda p_{uv}$$
$$\nu_v = -\lambda p_v \Rightarrow \nu_{vu} = -\lambda_u p_v - \lambda p_{vu}.$$

$$\nu_{uv} = -\lambda_v p_u - \lambda p_{uv}$$
$$\nu_{vu} = -\lambda_u p_v - \lambda p_{vu}.$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \nu_{uv} = \nu_{vu} \\ p_{uv} = p_{vu} \end{pmatrix}$ から $\lambda_v p_u - \lambda_u p_v = 0$

1次独立

$\therefore\ \lambda_u = \lambda_v = 0 \Longrightarrow$ λは定数

Dの連結性

(1) $\lambda = 0$ $\quad \nu_u = 0,\ \nu_v = 0 \quad \nu$: 定ベクトル

$\varphi(u,v) = (p(u,v) - p(u_0,v_0))\cdot\nu$ とおくと

$\varphi_u = p_u\cdot\nu = 0 \qquad \varphi_v = 0$

$\varphi(u_0,v_0) = 0$

よって $\quad (p(u,v) - x_0)\cdot\nu = 0 \qquad x_0 = p(u_0,v_0)$

すなわち $\quad p(u,v) \in \Pi = \{x \mid \underbrace{(x - x_0)\cdot\nu}_{0}\}$ 平面

(2) $\lambda \neq 0$ $\quad \nu_u = -\lambda p_u \qquad \nu_v = -\lambda p_v$

$$\left(p + \frac{1}{\lambda}\nu\right)_u = 0 \qquad \left(p + \frac{1}{\lambda}\nu\right)_v = 0$$

$$\therefore \quad p - \frac{1}{\lambda}\nu = x_0 \ : \text{const.}$$

$$p - x_0 = -\frac{1}{\lambda}\nu$$

$$|p - x_0| = \frac{1}{|\lambda|}$$

i.e. $\quad p(u, v) \in S := \left\{ x \;\middle|\; |x - x_0| = \frac{1}{|\lambda|} \right\}$

球面

問題 4-2

$H=0$　　$\lambda_1=\lambda_2$　　$K=0$

問題

極小曲面の臍点はガウス曲率が零となる点であることを示しなさい．さらに，ガウス曲率が負となる極小曲面上の点では漸近方向が直交することを示しなさい．

臍点ではない

(1) 主曲率を λ_1, λ_2 とすると 極小曲面なので

$\lambda_1+\lambda_2=0 \quad \therefore\ \lambda_2=-\lambda_1$

臍点では $\lambda_1=\lambda_2$ なので $\lambda_1=\lambda_2=0$ となる

このとき $K=\lambda_1\lambda_2=0$

逆に $K=0$ かつ $H=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$ ∴臍点．

(2) 曲面上の点 P が原点、主方向が ${}^t(1, 0, 0)$、${}^t(0, 1, 0)$ となるように曲面を移動して

$\phi(x, y) = {}^t(x, y, f(x, y))$ とおく。

すると

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2) + o(x^2 + y^2)$$

$\lambda_2 = -\lambda_1$

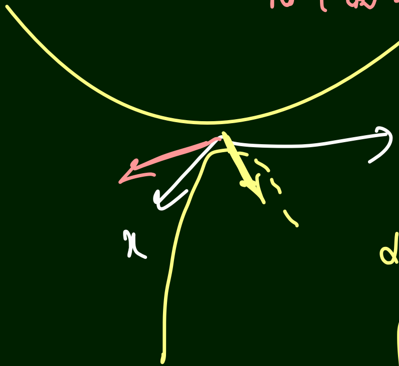
$$= \frac{1}{2}\lambda_1 (x^2 - y^2) + o(x^2 + y^2)$$

原点で $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix}$

漸近方向 : $L\alpha^2 + 2\alpha\beta M + N\beta^2 = \lambda_1(\alpha^2 - \beta^2)$

$\beta = \pm\alpha$

極小曲面：臍点以外では
各平面で切った切り口が
直交する2曲線



$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta=\pm\alpha$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\perp\quad\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

錐面

平坦 flat

$\boxed{K=0}$

柱面

問題

弧長 u によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma(u)$ の曲率が零点を持たないとき，$p(u,v) := \gamma(u) + v\gamma'(u)$ で与えられる曲面の正則点におけるガウス曲率は零である（問題 3-2）．この状況で，p の第一基本形式が $d\xi^2 + d\eta^2$ となるようなパラメータ変換 $(\xi,\eta) \mapsto (u,v)$ を求めなさい．

接線曲面

Thm　$K \equiv 0 \Rightarrow$ 各点の近傍で $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$ となるパラメータ (ξ, η) が存在する

γ の Frenet枠 $\{e, n, b\}$

$$p = \gamma(u) + v\,e(u) \quad \begin{cases} p_u = e + v\kappa n \\ p_v = e \end{cases}$$

$$ds^2 = (1 + v^2\kappa^2)\,du^2 + 2\,du\,dv + dv^2$$

$\sigma(u)$: $\mathbb{R}^2$ の曲線，曲率が κ となるものをとる

平面曲線の基本定理

$\{\tilde{e}, \tilde{n}\}$: Frenet枠

$$q(u, v) = \sigma(u) + v\,\tilde{e}(u) : (u, v) \longmapsto (\xi, \eta)$$

逆写像定理

(以下略)

$$d\xi^2 + d\eta^2 = (1 + v^2\kappa^2)\,du^2 + 2\,du\,dv + dv^2$$

$$\frac{d}{dt}\iint \sqrt{E_t G_t - F_t^2}\, du\, dv$$

問題

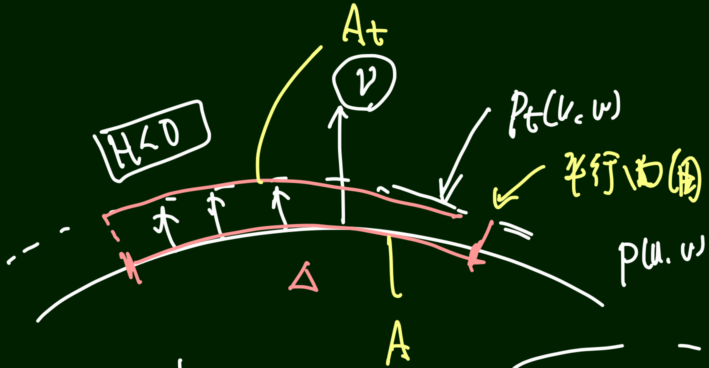
領域 D 上で定義された正則曲面 $p\colon D \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル ν をとり，実数 t に対して $p_t := p + t\nu$ とおく．有界領域 $\Delta \subset D$ において

- 正の数 ε で，任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $p_t\colon \overline{\Delta} \to \mathbb{R}^3$ が正則曲面を与えるようなものが存在することを示しなさい．
- $p_t(\overline{\Delta})$（$|t| < \varepsilon$）の面積を $A(t) := \mathcal{A}_{p_t}(\overline{\Delta})$ と書くとき，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(t) = -2\iint_{\Delta} H(u, v)\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

であることを示しなさい．ただし E_t, F_t, G_t は p_t の第一基本量，H は平均曲率である．

E F G p



$$\left.\frac{dA_t}{dt}\right|_{t=0} = -2\iint_{\Delta} H \underbrace{\sqrt{EG-F^2}}_{\text{面積密度}}\, du\, dv$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} E_t = \frac{d}{dt}(p_u + t v_u)\cdot(p_u + t v_u)\Big|_{t=0} - \cdots$$