空間曲線の基本定理

$\kappa, \tau \rightsquigarrow$ 曲線が定まる

幾何学概論第二 (MTH.B212)

$\boxed{\text{曲面論の基本定理}}$

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/01/20

E, F, G

L, M, N

独立でない

(ある関係式

を満たす)

$\longrightarrow$ 曲面ができる

ガウス枠

- $U \subset \mathbb{R}^2$：領域．座標を (u, v) と書く．
- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：$C^\infty$-級正則曲面．
- ν：単位法ベクトル場．

p_u, p_v：1次独立．

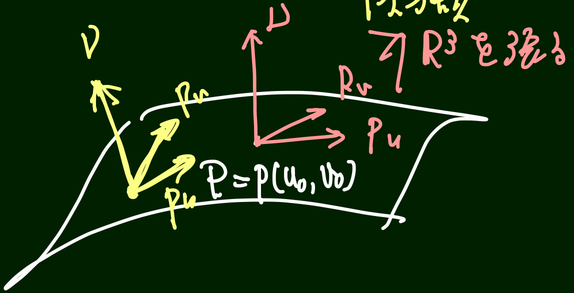
ガウス枠：

Gauss Frame

$$\mathcal{F} := \underbrace{(p_u, p_v, \nu)}_{\text{1次独立}}\colon U \longrightarrow \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \approx \{3\times 3\ \text{実正則行列}\}$$

一般線型群

general linear



ガウス・ワインガルテンの公式

$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_u =: \Omega$

$\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda,$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & -A^1_1 \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & -A^2_1 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & -A^1_2 \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} & -A^2_2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}$$

ただし

$(p_{uu}\ p_{vu}\ \nu_u) = (p_u\ p_v\ \nu)(\ \ )$

p_{uu} を p_u, p_v, ν の線型結合で表す

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12}(=\Gamma^1_{21}) & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12}(=\Gamma^2_{21}) & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} := \frac{1}{2}\widehat{I}^{-1} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}. \quad \text{etc}$$

Christoffel 記号

E, F, G で書ける

$$\boxed{(\nu_u\ \nu_v) = -(p_u\ p_v)A}$$

$p_{uu}\cdot\nu = L \quad p_{vv}\cdot\nu = N$

$p_{uv}\cdot\nu = M$

$$p_{uu} = \Gamma^1_{11} p_u + \Gamma^2_{11} p_v + L\nu$$

$$p_{vu} = \Gamma^1_{21} p_u + \Gamma^2_{21} p_v + M\nu$$

$$p_{uu} \cdot p_u = \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F$$

$$= \Gamma^1_{11} F + \Gamma^2_{11} G$$

$$\|$$

$$\frac{1}{2}(p_u \cdot p_u)_u = \frac{1}{2} E_u$$

$$\| \; p_{uv}$$

$$p_{uu} \cdot p_v = (p_u \cdot p_v)_u - p_u \cdot p_{vu}$$

$$= F_u - \frac{1}{2}(p_u \cdot p_u)_v = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}$$

etc

可積分条件

$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega \qquad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$

E, F, G
L, M, N
を含む

命題 可積分条件

$\Omega = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_u$, $\Lambda = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_v$ は次を満たす：

$$\boxed{\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O.} \qquad (*)$$

E F G
L M N
がみたすべき
関係式

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega \Rightarrow \mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_v\Omega + \mathcal{F}\Omega_v$$
$$= \mathcal{F}\Lambda\Omega + \mathcal{F}\Omega_v$$
$$= \mathcal{F}(\Lambda\Omega + \Omega_v)$$

正則

$$\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda \Rightarrow \mathcal{F}_{vu} = \mathcal{F}(\Omega\Lambda + \Lambda_u)$$

曲面論の基本定理

E, F, G : $E>0$, $G>0$, $EG-F^2>0$

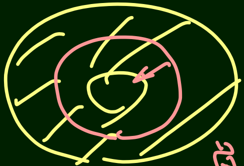
定理

$\mathbb{R}^2$ の単連結領域 U 上で定義された 6 つの C^∞-級関数 E, F, G, L, M, N が $(*)$ を満たすならば，正則曲面 ∃ $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ で第一基本量，第二基本量がそれぞれ E, F, G, L, M, N となるものが，合同変換を除きただ一つ存在する．

微妙

穴がない

loopが1点に連続変形できる



単連結でない

問題 5-1

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一・第二基本形式が次の形であるとする：

$\boxed{\Omega, \Lambda\ ?}$

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

ただし σ, L, M, N は U で定義された C^∞-級関数，(u, v) は $\mathbb{R}^2$ の座標である． $H=0$

- p が極小曲面であるとき p の各成分は (u, v) に関する調和関数であることを示しなさい． $\Delta p = p_{uu} + p_{vv} = 0$
- p の平均曲率が一定のとき，M, $L - N$ は共に (u, v) に関する調和関数であることを示しなさい．

$\Delta M = 0$

$\Delta(L-N) = 0$

問題 5-2

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一基本形式，第二基本形式が

$$ds^2 = d\xi^2 + 2\cos\theta\, d\xi\, d\eta + d\eta^2, \qquad I\!I = 2c\sin\theta\, d\xi\, d\eta$$

と表されているとする．ただし (ξ, η) は $\mathbb{R}^2$ の座標，$\theta\colon U \to (0, \pi)$ は C^∞-関数，c は正の定数である．

- p のガウス曲率を求めなさい．
- ~~ガウス方程式~~を θ に関する方程式として具体的に記述しなさい．

体の式

可積分条件

本日の課題の提出締切は

2022年1月~~1~~24日（月曜日）07:00 JST

次回1月27日に定期試験予告をします