

幾何学概論第二 (MTH.B212)

曲面論の基本定理

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/>

東京工業大学理学院数学系

2022/01/20

ガウス枠

- ▶ $U \subset \mathbb{R}^2$: 領域. 座標を (u, v) と書く.
- ▶ $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$: C^∞ -級正則曲面.
- ▶ ν : 単位法ベクトル場.

ガウス枠 :

$$\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu) : U \longrightarrow \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$$

ガウス・ワインガルテンの公式

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda,$$

$$\left(\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix} \right)$$

ただし

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 (= \Gamma_{21}^1) & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 (= \Gamma_{21}^2) & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} := \frac{1}{2} \hat{I}^{-1} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

可積分条件

命題

$\Omega = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_u$, $\Lambda = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_v$ は次を満たす：

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O. \quad (*)$$

曲面論の基本定理

定理

\mathbb{R}^2 の単連結領域 U 上で定義された 6 つの C^∞ -級関数 E, F, G, L, M, N が (*) を満たすならば, 正則曲面 $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ で第一基本量, 第二基本量がそれぞれ E, F, G, L, M, N となるものが, 合同変換を除きただ一つ存在する.

問題 5-1

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ の第一・第二基本形式が次の形であるとする：

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \quad II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2.$$

ただし σ, L, M, N は U で定義された C^∞ -級関数, (u, v) は \mathbb{R}^2 の座標である.

- ▶ p が極小曲面であるとき p の各成分は (u, v) に関する調和関数であることを示しなさい.
- ▶ p の平均曲率が一定のとき, $M, L - N$ は共に (u, v) に関する調和関数であることを示しなさい.

問題 5-2

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ の第一基本形式, 第二基本形式が

$$ds^2 = d\xi^2 + 2 \cos \theta d\xi d\eta + d\eta^2, \quad II = 2c \sin \theta d\xi d\eta$$

と表されているとする. ただし (ξ, η) は \mathbb{R}^2 の座標, $\theta: U \rightarrow (0, \pi)$ は C^∞ -関数, c は正の定数である.

- ▶ p のガウス曲率を求めなさい.
- ▶ ガウス方程式を θ に関する方程式として具体的に記述しなさい.