2022 年 1 月 20 日 (2022 年 1 月 27 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 5

■お知らせ

- 今回は 27 名の方から課題の提出がありました．
- 次回，1 月 27 日（木）に定期試験の予告を行います．

■前回の補足

- 問題 4-1（すべての点が臍点なら平面か球面の一部）で，主曲率（A の固有値）が重根 λ を持つならば $A=\lambda I$（I は単位行列）とかける，という部分，少し説明が必要ですね：A は一般に対称行列ではないが，特別な座標系をとると対称行列にできる．すなわち A は対称行列に共役なので，対角化可能．とくに $P^{-1}AP=\lambda I$ となるので，$A=\lambda I$ が従う．このことはパラメータのとり方によらない．
- 平面曲線のアナロジーとして，曲面を球面で近似することができないか，というご質問が複数．曲面上の点 P が臍点でないならば，各方向での「曲がり具合」（ここでは法曲率が一定でない．一方，球面はすべての点が臍点なので，臍点の近くでは曲面は球面で近似できるが（このことを指摘された方もありました），それ以外では近似できなさそう．
- 曲面上の曲線の加速度ベクトルの，曲面の法線方向の成分の（符号付き）大きさが法曲率だが，接方向の成分は意味があるのか，というご質問が複数．「測地的曲率」といいます．多分次回に扱います．
- $\mathbb{R}^4$ の「曲体」と称して $\mathbb{R}^4$ 内で 3 パラメータで表される図形の「臍点」を考察して，すべての点が臍点で主曲率が 0 でないならば「4 次元超球面の一部」ということを示していただいています．一般に $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の n パラメータで表される図形は**超曲面** hypersurface といいます．「4 次元超球面」とおっしゃっているのは通常 3 **次元球面**とよばれます．一般に $\mathbb{R}^{n+1}$ の超曲面について問題 4-1 と同様のことが成り立ちます．
- 二つの主方向が直交することを複数のやりかたで示した方がいらっしゃいます．

■前回までの訂正

- 提出用紙の冒頭：**2021 年** ⇒ **2022 年**
- 講義資料 3 ページ，2 行目：U で定義された正則曲面 ⇒ U で定義された C^∞-級正則曲面．
  とくに断らない限り C^∞ とするということにしているつもりですが，C^2 でない場合の「対称性」について言及した方がいらっしゃったので．
- 講義資料 3 ページ，命題 4.3 の証明：$\ddot\gamma=(\dot u)^2p_{uu}+\dot u\dot v p_{uv}+(\dot v^2)p_{vv}+\ddot u p_u+\ddot v p_v$
  $\Rightarrow \ddot\gamma=(\dot u)^2p_{uu}+2\dot u\dot v p_{uv}+(\dot v^2)p_{vv}+\ddot u p_u+\ddot v p_v$
- 講義資料 3 ページ，下から 11 行目：となる曲線 の P における ⇒ となる曲線 γ の P における
- 20220106 黒板 C，ページ番号 4 の一つ前：multiplyer ⇒ multiplier
- 20220106 黒板 C，ページ番号 5：$f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$（$=0$ を追加）

■授業に関する御意見

- 臍点の臍は画数が多いので，臍点をせい点とかけば意味を保ったまま総画数を減らせると思いました．臍はさいとも読めるのでさい点とかけますが，この場合は採点の意味にもとれるので意味は保たれないと思いました．
  山田のコメント： なるほど．「ふん囲気」とか「だ円」とかみたいに…
- 前回，清書までしたのに提出したものを忘れてしまったので，今回は出せてよかったです．今回は 4 つも問題があったのでどれを提出用にするかとてもなやみました． **山田のコメント：** そういうときは「人がやってなさそう」なものを出すと面白い．
- 用語がたくさん出てくるのでたまに頭がごちゃごちゃになってしまいます．
  山田のコメント： 山田も新しいことをやろうとするとよくそうなります．手を動かして慣れるのがよいのかなと思います．

■質問と回答

質問 1： 曲面上の曲線 $\gamma(t)=p(u(t),v(t))$ について，講義中法曲率が $\ddot u$, $\ddot v$ によらないことが重要とおっしゃっていましたが，なぜ重要なのでしょうか．私には計算が簡単になるくらいしか思いつきませんでした．

お答え： 考えている点で速度ベクトルが同じ曲線の法曲率は一致する．したがって，曲面上の点における接ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ を定義することができる．

質問 2：「$\ddot{\gamma}\cdot\nu$ が $\ddot{u}$, $\ddot{v}$ によらない」というのはどういうことですか？ $\dot{u}=\dot{\tilde{u}}$, $\dot{v}=\dot{\tilde{v}}$ なる γ について $\ddot{\gamma}\cdot\nu=\ddot{\tilde{\gamma}}\cdot\nu$ という意味なら「$\dot{u}$, $\dot{v}$ のみによる」と言うべきな気がします．$\gamma=(u,v)$ が曲線な以上，単純に $\ddot{u}$, $\ddot{v}$ を 1 つの変数とみて $\frac{\partial}{\partial\ddot{u}}(\ddot{\gamma}\cdot\nu)=0$ みたいには考えられません（解セキ力学だとこういう書き方をしますけど）．よくわかりませんでした．

お答え： ご質問にある通りの意味で間違いありません．業界では「曲線の 1-jet によって定まる」というべきなのかもしれません．

質問 3： テキスト §9，定理 9.7 から $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\kappa_n d\varphi=$ (中略) $=H$ が得られますが，これはすなわち，平均曲率というのはあらゆる方向における主曲率の連続的な平均をとったものということでよろしいでしょうか．　**お答え：**はい．

質問 4： 正則曲面上の曲線で法曲率を積分を考えると「角度」に関する有用な量が出て来る気がしますが，使われますか？

お答え： どういう角度でしょう．山田はこの積分量を使ったことがないですが，測地的曲率（次回扱う）の積分はテキストにあるガウス・ボンネの定理で使われていますね．

質問 5： 授業では $K>0$, $K<0$ のときの性質を扱いましたが $K=0$ のときは，臍点ならば主曲率が 0 なので $A=O$ より $\widehat{I\!I}=O$ から像は平面の一部である．臍点でなければ主曲率の一方が 0 なので漸近方向は 1 つでよろしいでしょうか？

お答え： 後半は正しい．前半は「ある領域で $K=0$ ならその領域の像は平面の一部」．ある点で $K=0$ かつ臍点である場合はさまざまなケースがある．

質問 6： ガウス曲率・平均曲率が発散することはありますか．

質問 7： ガウス曲率は平均曲率が発散することはありますか？ 特異点に近づくときに発散したりするのでしょうか？

お答え： 正則曲面では発散しない．なぜなら well-defined だから．特異点ではどうか，$p(u,v)={}^t(au^2+v^2, bv^2+v^3, u)$ (a, b は定数）で確かめてみよう．

質問 8： 曲面の点 p での単位法ベクトルの向きのとり方（符号）を逆（$+\to 0$）に変えてもワインガルテン行列の固有値の正負は変わらないという理解で良いでしょうか．　**お答え：**いいえ．単位法ベクトルを反転させると A は $-A$ になるので固有値の符号は入れ替わります．しかしそれらの積であるガウス曲率の符号は変わりません．

質問 9： 主曲率でガウス曲率と平均曲率を表せるので，主曲率のみ定義してもよいのではないかと思いました．後半 2 つも定義しているのはどうしてでしょうか．

お答え： 積や和をとって初めて現れる性質があります．たとえば前回の問題 4-3 は「ガウス曲率が 0 なら $ds^2=d\xi^2+d\eta^2$ と書けるパラメータが存在する」という一般的な性質の特別な場合，問題 4-4 は面積の変化に「平均曲率」が関係する．

質問 10： 定理 4.4 について，ラグランジュの未定定数法を用いて $\Phi=h-\lambda(g-1)$ とし，$\Phi_\alpha=\Phi_\beta$ となる点を考えたところ λ が主曲率となりました．ここから $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ が主曲率となることをどのように導くのですか？

お答え： $\hat{\boldsymbol{v}}={}^t(\alpha,\beta)$ とおくと，極値を取る点で $\widehat{I\!I}\,\hat{\boldsymbol{v}}=\lambda\,\widehat{I}\,\hat{\boldsymbol{v}}$ が成り立つので，両辺に左から ${}^t\boldsymbol{v}$ をかけて $\kappa_n(\boldsymbol{v})=L\alpha^2+2M\alpha\beta+N\beta^2=\lambda(E\alpha^2+2F\alpha\beta+G\beta^2)=\lambda$.

質問 11： 臍点でワインガルテン行列 A が $\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$ となるのは，A が $\widehat{I\!I}$（対称行列）と相似であるから A は対角化可能で $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$ となり，$A=\lambda E$ と考えたのですが，これは正しいですか？

お答え： 惜しいけれど正しくないです．A は対称行列に共役ですが，それは $\widehat{I\!I}$ ではありません：$\widehat{I}$ は固有値が正の対称行列だから，直交行列 Q によって $Q^{-1}\,\widehat{I}\,Q=\begin{pmatrix}\alpha^2&0\\0&\beta^2\end{pmatrix}$ (α, $\beta>0$) とできる．$R:=Q\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}Q^{-1}$ とおくと R は $\widehat{I}=R^2$ を満たす対称行列である．これを用いると $RAR^{-1}=R^{-1}\,\widehat{I\!I}\,R^{-1}$．右辺は対称行列なので A は対称行列に相似．

質問 12： ワインガルテン行列は対称行列とは限らないですが「$\det A(p)=0$」のような p を除いて他の点での A が対称行列である」ということですか．

お答え： いいえ．$\det A$ が零かそうでないかは関係ありません．対称行列に相似（共役）にはなります．

質問 13： 講義資料では臍点を “umbilic point” とされていますが Wikipedia だと “umbilics” または “umbilical point” としています．へその緒を umbilical cord と呼ぶので umbilical point が正しいのではと思いました．

お答え： Umbilic point/umbilical point の両方が使われるようです．Umbilic を形容詞として使えるか，ですね．とくにこだわりはないのですが，習慣的に（たぶん最初に聞いたのが umbilic だったから）山田は umblic を使っています．

質問 14：「臍点」というネーミングは，主方向が定まらないような “ヤバい” 点として「特異点」と使い分けるためのものなのでしょうか．確かに，ヘソは体の中でも特異点っぽさがあります．また臍点においても標準形がさだめられるように，臍点も臍点でない点と同様にその点での性質を考察できるように思います．臍点の “ヤバさ” はどんなところに現れるのでしょうか．

お答え： たとえば臍点を中心とした曲率線座標がとれない．曲率線が複雑な挙動をする．テキスト §14, 付録 B-4 参照

質問 15： 臍点という言葉の由来は何でしょうか．

お答え： よく知りませんが，すべての方向に「曲がり具合が一定」．

質問 16： $(p_u,p_v)\mapsto(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ ($\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ は主方向）のようなパラメータ変換が可能ですか．もし可能であればどんな拘束条件がありますか．

お答え： 臍点でない点の近くではパラメータ (ξ,η) で (p_ξ,p_η) が主方向を向く（単位ベクトルとは限らない）パラメータがとれます．これを曲率線座標といいます．テキスト，付録 B-4.

質問 17： $f(x,y)=(x^2+y^2)^2\cos(4\tan^{-1}\frac{y}{x})$ として ($x=0$ で連続になるように定義する），$p(u,v)=(u,v,f(u,v))$ としたとき，主方向が直交しないのではないか．また $g(x,y)=(x^2+y^2)\cos(4\tan^{-1}\frac{y}{x})$ に対し $q(u,v)=(u,v,g(u,v))$ としたとき $g(u,v)=\frac{1}{2}(\lambda_1x^2+\lambda_2x^2)+o(x^2+y^2)$ とかけない．これは q が正則でないからですか．

お答え： 前半：$f(x,y)=x^4-6x^2y^2+y^4$．この場合，原点は臍点．後半：$g(x,y)=f(x,y)/(x^2+y^2)$．原点で C^2-級にならない．

質問 18： $p(u,v)$ が C^2-級でなく偏微分の順序交換が許されないような曲面は第一・第二基本形式が存在しないですが，このような性質の悪い曲面を考えることはありますか．

お答え： 第一基本形式は定義できるのでは？ C^2 でない例は上の質問で現れている．

5 曲面論の基本定理

ここでは断りのない限り $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級正則曲面，ν を p の単位法ベクトル場とする．

■ガウス曲率・平均曲率・主曲率（復習） 正則曲面 p の第一・第二基本行列は次のように定義された：

$$\widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}, \quad \widehat{I\!I} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p_u \cdot \nu_u & p_u \cdot \nu_v \\ p_v \cdot \nu_u & p_v \cdot \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot \nu & p_{uv} \cdot \nu \\ p_{vu} \cdot \nu & p_{vv} \cdot \nu \end{pmatrix}.$$

第一基本行列 $\widehat{I}$ の固有値は正，とくに $\det \widehat{I} > 0$ なので，次のように**ワインガルテン行列** A が定義される：

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{I\!I} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

事実 5.1.
- ワインガルテン行列 A の固有値 λ_1, λ_2 は実数である（主曲率）．
- 主曲率はパラメータのとり方によらない．$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} A$, $K = \det A$ を各々平均曲率，ガウス曲率という．
- ワインガルテンの公式 $(\nu_u, \nu_v) = -(p_u, p_v)A$.

■クリストッフェル記号とガウスの公式 正則曲面と単位法ベクトル場の定義から各点 $(u, v) \in U$ において $\{p_u(u,v), p_v(u,v), \nu(u,v)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底を与える．とくに $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$ とおくと，各点 (u, v) において $\mathcal{F}$ は正則行列を与える：$\mathcal{F}\colon U \to \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$.[*1] これを正則曲面 p の**ガウス枠**という．とくに次が成り立つ：

$${}^t\mathcal{F}\mathcal{F} = \begin{pmatrix} {}^tp_u \\ {}^tp_v \\ {}^t\nu \end{pmatrix}(p_u, p_v, \nu) = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v & p_u \cdot \nu \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v & p_v \cdot \nu \\ \nu \cdot p_u & \nu \cdot p_v & \nu \cdot \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

定理 5.2 (ガウス・ワインガルテンの公式)**.** 曲面 $p = p(u, v)$ のガウス枠 $\mathcal{F}$ は次を満たす：

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = F\Lambda, \quad \left(\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}\right) \tag{5.3}$$

$$\text{ただし} \quad \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 (= \Gamma_{21}^1) & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 (= \Gamma_{21}^2) & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} := \frac{1}{2}\widehat{I}^{-1}\begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

証明： $\mathcal{F}$ は正則行列に値をもつ関数だから $\Omega := \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_u$, $\Lambda := \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_v$ は C^∞-級の行列値関数．とくに，ワインガルテンの公式から Ω と Λ の第 3 列は (5.3) の形をしていることがわかる．第二基本形式の定義から Ω, Λ の第 3 行も (5.3) であることがわかるから，あとは

$$(p_{uu}, p_{uv}(= p_{vu}), p_{vv}) = (p_u, p_v, \nu)\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 (= \Gamma_{21}^1) & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 (= \Gamma_{21}^2) & \Gamma_{22}^2 \\ L & M & N \end{pmatrix} = \mathcal{F}\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \\ L & M & N \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

とおいたときの Γ_{ij}^k が (5.3) の 2 行目の形になることを示せば良い．ここで，

$$\begin{aligned} &p_{uu} \cdot p_u = \frac{1}{2}(p_u \cdot p_u)_u = \frac{1}{2}E_u, && p_{uu} \cdot p_v = (p_u \cdot p_v)_u - p_u \cdot p_{vu} = F_u - \frac{1}{2}E_v, && p_{uu} \cdot \nu = L \\ &p_{uv} \cdot p_u = \frac{1}{2}(p_u \cdot p_u)_v = \frac{1}{2}E_v, && p_{uv} \cdot p_v = \frac{1}{2}G_u && p_{uv} \cdot \nu = M \\ &p_{vv} \cdot p_u = F_v - \frac{1}{2}G_u && p_{vv} \cdot p_v = \frac{1}{2}G_v && p_{vv} \cdot \nu = N \end{aligned}$$

2022 年 1 月 20 日 (2022 年 1 月 27 日訂正)

[*1] $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ で実数を成分とする 3 次正則行列全体を表す．

なので，(5.4) の両辺に左から ${}^t\mathcal{F}$ をかけると，

$${}^t\mathcal{F}(p_{uu}, p_{uv}, p_{vv}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \\ 2L & 2M & 2N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \\ L & M & N \end{pmatrix}$$

となるので，Γ_{ij}^k が求まる．

式 (5.3) の最初の 2 式をガウスの公式，Γ_{ij}^k を**クリストッフェル記号**という．クリストッフェル記号は第一基本量 E, F, G とその偏導関数で表される．したがって Ω, Λ は曲面の第一基本量，第二基本量から定まる行列である．

命題 5.3. 式 (5.3) で定義された Ω, Λ は次を満たす：

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O. \tag{5.5}$$

証明： 式 (5.3) の最初の二式をそれぞれ v, u で微分すると

$$\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_v\Omega + \mathcal{F}\Omega_v = \mathcal{F}\Lambda\Omega + \mathcal{F}\Omega_v, \qquad \mathcal{F}_{vu} = \mathcal{F}\Omega\Lambda + \mathcal{F}\Lambda_u.$$

これらが等しいので $\mathcal{F}^{-1}$ を左からかければ結論が得られる．

このことから，曲面の第一基本量，第二基本量は独立ではなく，等式 (5.5) を満たさなければならないことがわかる．(5.5) をガウス・ワインガルテンの公式の**可積分条件・適合条件**と呼ぶ．ここでは証明を与えないが，次が成り立つ：

定理 5.4 (曲面論の基本定理)**.** $\mathbb{R}^2$ の単連結領域[*2] U 上で定義された 6 つの C^∞-級関数 E, F, G, L, M, N が (5.5), $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$ を満たすならば，正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ で第一基本量，第二基本量がそれぞれ E, F, G, L, M, N となるものが，合同変換を除きただ一つ存在する．

問題

5-1 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一・第二基本形式が次の形であるとする：

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

ただし σ, L, M, N は U で定義された C^∞-級関数，(u, v) は $\mathbb{R}^2$ の座標である．

- p が極小曲面であるとき p の各成分は (u, v) に関する調和関数であることを示しなさい．
- p の平均曲率が一定のとき，M, $L - N$ は共に (u, v) に関する調和関数であることを示しなさい．

5-2 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一基本形式，第二基本形式が

$$ds^2 = d\xi^2 + 2\cos\theta\,d\xi\,d\eta + d\eta^2, \qquad I\!I = 2c\sin\theta\,d\xi\,d\eta$$

と表されているとする．ただし (ξ, η) は $\mathbb{R}^2$ の座標，$\theta\colon U \to (0, \pi)$ は C^∞-関数，c は正の定数である．

- p のガウス曲率を求めなさい．
- ガウス方程式を θ に関する方程式として具体的に記述しなさい．

[*2] $\mathbb{R}^2$ の「穴の空いていない」領域．