幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス方程式・測地線

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/01/27

問題

(初等的でない)

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一・第二基本形式が次の形であるとする：

Fact こういうパラメータが必ず存在

〃E=G　　F=0

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

一般論　　(等温座標系)

ただし σ, L, M, N は U で定義された C^∞-級関数，(u, v) は $\mathbb{R}^2$ の座標である．

- p が極小曲面であるとき p の各成分は (u, v) に関する調和関数であることを示しなさい．
- p の平均曲率が一定のとき，M, $L - N$ は共に (u, v) に関する調和関数であることを示しなさい．

$$
\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}L \\ -\sigma_v & \sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_v & -\sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}N \\ M & N & 0 \end{pmatrix}
$$

$\sigma_{uu} + \sigma_{vv}$

$$
\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -P & -e^{-2\sigma}Q \\ P & 0 & -e^{-2\sigma}R \\ Q & R & 0 \end{pmatrix} = O
$$

Gauss方程式: σの2階微分 $\longrightarrow$

$$
P = -\Delta\sigma - e^{-2\sigma}(LN - M^2) = 0
$$

$$
Q = L_v - M_u - \sigma_v(L + N) = 0
$$

$$
R = M_v - N_u + \sigma_u(L + N) = 0
$$

一般のパラメータでも同じ（3本の式）

$$-\Delta\sigma - e^{-2\sigma}(LN - M^2) = 0$$ Gauss方程式

$$e^{-4\sigma}(LN-M^2) = -e^{-2\sigma}\Delta\sigma$$

$$\| $$

$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = K$$

Gauss曲率

$$E = G = e^{2\sigma}$$

$$F = 0$$

$$K = -e^{-2\sigma}\Delta\sigma$$

KがE, F, Gのみで表される（一般に）

（Gaussの驚異の定理）

$$H = \frac{1}{2} e^{-2\sigma}(L+N) = 0$$

(Ω, Λ)

$$p_{uu} = \sigma_u p_u - \sigma_v p_v + L\nu$$

$$p_{vv} = -\sigma_u p_u + \sigma_v p_v + N\nu$$

$$\Delta p = (L+N)\nu$$

极小曲面 $\Longleftrightarrow$ p p^i（等温坐标下用 (z)）调和函数

$H = \text{const} \Rightarrow \underline{H_u = 0, \quad H_v = 0}$

$\Rightarrow \quad L-N, \quad M : \text{ harmonic}$

$$\left.\begin{aligned} L_v - M_u - \sigma_v(L+N) &= 0 \\ M_v - N_u + \sigma_u(L+N) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Codazzi方程式}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (L-N)_u = -2M_v \\ (L-N)_v = 2M_u \end{cases}$$

$u+iv \longmapsto (L-N) - 2iM$ が正則

Cauchy-Riemann

$$\Delta(L-N) = -2M_{vu} + 2M_{uv} = 0$$

〜複素関数論とのかかわり

問題 5-2

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一基本形式，第二基本形式が

$$ds^2 = d\xi^2 + 2\cos\theta\, d\xi\, d\eta + d\eta^2, \qquad II = 2c\sin\theta\, d\xi\, d\eta$$

と表されているとする．ただし (ξ, η) は $\mathbb{R}^2$ の座標，$\theta\colon U \to (0, \pi)$ は C^∞-関数，c は正の定数である．

- p のガウス曲率を求めなさい． $\boxed{-c^2}$ 定数
- ~~ガウス方~~程式可積分条件を θ に関する方程式として具体的に記述しなさい．

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \theta_u \cot\theta & 0 & c\cot\theta \\ -\theta_u \csc\theta & 0 & -c\csc\theta \\ 0 & c\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\csc\theta = \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_v \csc\theta & -c\csc\theta \\ 0 & \theta_v \cot\theta & c\cot\theta \\ c\sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可積分条件 $\Longleftrightarrow$ $\theta_{uv} = c^2 \sin\theta$ (1本)

$E = G = 1$

$$ds^2 = d\xi^2 + 2\cos\theta\, d\xi\, d\eta + d\eta^2, \qquad II = 2c\sin\theta\, d\xi\, d\eta$$

$L = N = 0$.

(ξ, η) : 漸近チェビシェフ網

$K =$ 負の定数 $\Longrightarrow$ $\exists$ 漸近チェビシェフ網

→ Codazzi をとく.

$c = 1$

$\theta_{\xi\eta} = \sin\theta$: (Sine Gordon 方程式)

$F'' = \sin F$

([illegible]) の方程式の解 $\longleftrightarrow$ $K = -1$ の曲面

$\theta(\xi, \eta) = F(\xi + \eta)$

$\theta(u, v) = 4\tan^{-1}\exp(u + v)$ → 回転面 (擬球面)

$\xi \quad \eta$ 　　　 $\xi \quad \eta$