幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス方程式・測地線

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/01/27

問題 5-1

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一・第二基本形式が次の形であるとする：

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

ただし σ, L, M, N は U で定義された C^∞-級関数，(u,v) は $\mathbb{R}^2$ の座標である.

- p が極小曲面であるとき p の各成分は (u,v) に関する調和関数であることを示しなさい.
- p の平均曲率が一定のとき，M, $L-N$ は共に (u,v) に関する調和関数であることを示しなさい.

問題 5-1

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}L \\ -\sigma_v & \sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_v & -\sigma_u & -e^{-2\sigma}M \\ \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma}N \\ M & N & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -P & -e^{-2\sigma}Q \\ P & 0 & -e^{-2\sigma}R \\ Q & R & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = -\Delta\sigma - e^{-2\sigma}(LN - M^2)$$

$$Q = L_v - M_u - \sigma_v(L + N)$$

$$R = M_v - N_u + \sigma_u(L + N)$$

問題 5-2

問題

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の第一基本形式，第二基本形式が

$$ds^2 = d\xi^2 + 2\cos\theta\, d\xi\, d\eta + d\eta^2, \qquad I\!I = 2c\sin\theta\, d\xi\, d\eta$$

と表されているとする．ただし (ξ, η) は $\mathbb{R}^2$ の座標，$\theta\colon U \to (0, \pi)$ は C^∞-関数，c は正の定数である．

- p のガウス曲率を求めなさい．
- ~~ガウス方程式~~可積分条件を θ に関する方程式として具体的に記述しなさい．

問題 5-2

$$
\Omega = \begin{pmatrix} \theta_u \cot\theta & 0 & c\cot\theta \\ -\theta_u \csc\theta & 0 & -c\csc\theta \\ 0 & c\sin\theta & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_v \csc\theta & -c\csc\theta \\ 0 & \theta_v \cot\theta & c\cot\theta \\ c\sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$