幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス方程式・測地線

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/01/27

ガウス枠

- $U \subset \mathbb{R}^2$：領域．座標を (u,v) と書く．
- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：$C^\infty$-級正則曲面．
- ν：単位法ベクトル場．
- $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)\colon U \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$：ガウス枠
- $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$（ガウス・ワインガルテンの公式）

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1(=\Gamma_{21}^1) & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2(=\Gamma_{21}^1) & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} := \frac{1}{2}\,\widehat{I}^{-1} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

命題（可積分条件）

$\Omega = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_u$, $\Lambda = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_v$ は次を満たす：

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O. \qquad \text{略} \qquad (*)$$

ガウス・コダッチの方程式

- 可積分条件は 3 本の独立な等式.
- ガウス方程式 テキスト 111 ページ (10.10) 式
- コダッチ方程式

2本

E, F, G の 2階微分, L, M, N の微分をふくむ.

等温座標では

$$\boxed{-e^{-2\sigma}\Delta\sigma = K}$$

ガウスの驚異の定理

定理

曲面のガウス曲率は第一基本量によって決まる．
（ガウス曲率は $\boxed{\text{「内的な量」}}$）

intrinsic　（↔ 外的 extrinsic）

系　$K>0$

地球の正確な地図はかけない．　（局所的）

$p(u,v)$, $q(u,v)$: 2つの曲面

E, F, G が共通 $\Rightarrow$ K も共通

弧長

（(u,v)平面上の長さ = 曲面上の長さ）

$$\int \sqrt{\dot{u}^2+\dot{v}^2}\,dt = \int \sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = du^2+dv^2} \qquad K=0$$

$$p(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$ 平面

$$q(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}$$ 円柱

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

$$\Rightarrow \boxed{K = 0}$$

$\mathbb{R}^3$ の直和分解

曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル ν をひとつとる.

- $dp(T_{(u_0,v_0)}U) := \mathrm{Span}\{p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\}$
  : (u_0,v_0) における p の接ベクトル空間.

各 (u,v) において

$\perp$

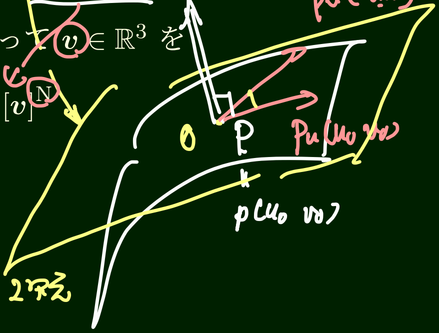
$$\mathbb{R}^3 = dp(T_{(u_0,v_0)}U) \oplus \mathbb{R}\nu(u_0,v_0)$$

なる $\boxed{\text{直交直和分解}}$がある. これに従って $v \in \mathbb{R}^3$ を

$$v = [v]^{\mathrm{T}} + [v]^{\mathrm{N}}$$

と分解する.

$\mathbb{R}^3 \supset$



定義

曲面上の正則曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$（パラメータは弧長とは限らない）が

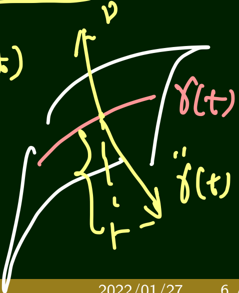
- 準測地線 $\Leftrightarrow$ 各 t で $[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}}$ が $\dot\gamma(t)$ と一次従属.
- 測地線 $\Leftrightarrow$ 各 t で $[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$.

法曲率　$\gamma(t) = p(u(t), v(t))$　$\boxed{s: 弧長}$

$$\ddot\gamma(t) \cdot \nu(u(t), v(t)) =: \kappa_n(t)$$

法曲率

$$\ddot\gamma(t) = \underbrace{[\ddot\gamma(t)]^{T}}_{測地的曲率ベクトル} + \underbrace{[\ddot\gamma(t)]^{N}}_{\kappa_n \nu}$$



定義

曲面上の正則曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$（パラメータは弧長とは限らない）が

- 準測地線 $\Leftrightarrow$ 各 t で $[\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}}$ が $\dot{\gamma}(t)$ と一次従属. → まっすぐ（加速度が接線方向）
- 測地線 $\Leftrightarrow$ 各 t で $[\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$.

tangent

geodesic

pregeodesic

直線

等速運動

測地線と準測地線

命題

曲面上の曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ が,

- 測地線ならば, $|\dot{\gamma}(t)|$ は t によらず一定である.
- 準測地線ならば, パラメータを弧長に取り替えれば測地線である.

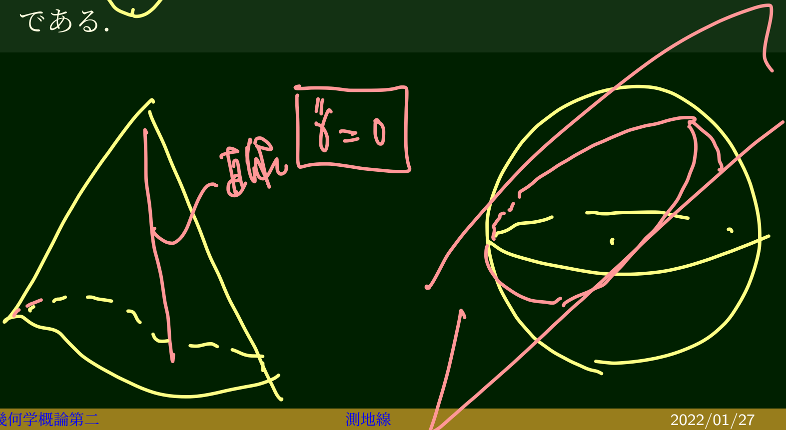
測地線: 曲線のパラメータの測り方による.

準〃 : パラメータによらない

測地線と準測地線

例

- 曲面上にのっている直線が存在するならばこれは準測地線である.
- 球面の大円（中心を通る平面と球面の共通部分）は準測地線である.



球面 $\{x \mid |x| = r\}$ 上の曲線 $\gamma(t)$ を考える

• $\gamma \cdot \gamma = r^2 \Rightarrow \gamma \perp \dot{\gamma}$ $\quad \left(\nu = \dfrac{\gamma}{|\gamma|} \right)$

• $\dfrac{d}{dt}(\gamma \times \dot{\gamma}) = \cancel{\dot{\gamma} \times \dot{\gamma}} + \gamma \times \ddot{\gamma}$

$/\!/ \gamma$

$= \gamma \times \left(\underbrace{[\ddot{\gamma}]^T}_{\shortparallel} + \cancel{[\ddot{\gamma}]^N} \right)$

γ : 測地線

$\Rightarrow$

$= \gamma \times 0 = 0$

$\therefore \ \gamma \times \dot{\gamma} = v$: constant.

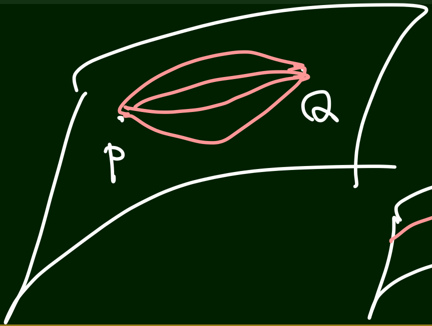
$\gamma \perp v$ になって γ は原点を通り v に垂直な平面上にのっている.

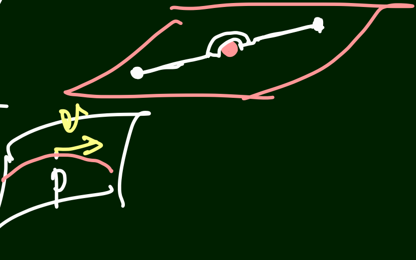
測地線の性質

事実

最短

- 曲面上の 2 点を結ぶ曲線のうち，長さ最小のものが存在するならばそれは準測地線である．
  パラメータの取り方によらず．
- 曲面上の点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ に対し，$\gamma(0) = \mathrm{P}$, $\dot{\gamma}(0) = \boldsymbol{v} \in dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ となる測地線 γ が十分小さい t の範囲でただ一つ存在する．
  パラメータも決まる





問題 6-1

問題

曲面 $p(u,v) = (u,v,0)$, $q(u,v) = (\overset{\cos u}{\cancel{u\cos v}}, \overset{\sin u}{\cancel{u\sin v}}, \overset{v}{\cancel{v}})$ の第一基本量，平均曲率を計算して，平均曲率が「内的な量」でないことを示しなさい.

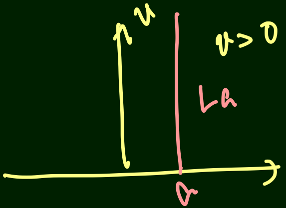
問題 6-2

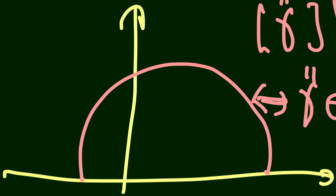
問題

曲面 $p\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^3$ を

擬球面

$p(u,v) := (\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v-\tanh v)$ で与えるとき，
uv-平面上の曲線 $\boxed{L_a := \{(u,v)\,;\,u=a, v>0\}}$，
$C_{a,b} := \{\boxed{(u,v)\,;\,(u-a)^2+\cosh^2 v = b^2, v>0}\}$ に対応する曲面上の曲線は準測地線であることを示しなさい．ただし $a\in\mathbb{R}$，
$b\in(1,\infty)$ は定数である．





$[\gamma'']^T /\!/ \gamma'$

$\iff \gamma'' \in \operatorname{Span}\{\gamma', \nu\}$

$\iff \det(\gamma'\ \gamma''\ \nu) = 0$

本日の課題の提出締切は

2022 年 1 月 31 日（月曜日）07:00 JST