幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス方程式・測地線

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/01/27

ガウス枠

- $U \subset \mathbb{R}^2$：領域．座標を (u, v) と書く．
- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：$C^\infty$-級正則曲面．
- ν：単位法ベクトル場．
- $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)\colon U \to \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$：ガウス枠
- $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\Lambda$（ガウス・ワインガルテンの公式）

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1(=\Gamma_{21}^1) & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2(=\Gamma_{21}^1) & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} := \frac{1}{2}\widehat{I}^{-1} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

命題 (可積分条件)

$\Omega = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_u$, $\Lambda = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_v$ は次を満たす：

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O. \qquad (*)$$

ガウス・コダッチの方程式

- 可積分条件は 3 本の独立な等式.
- ガウス方程式 テキスト 111 ページ (10.10) 式
- コダッチ方程式

ガウスの驚異の定理

定理

曲面のガウス曲率は第一基本量によって決まる.
（ガウス曲率は「内的な量」）

系

地球の正確な地図はかけない.

$\mathbb{R}^3$ の直和分解

曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル ν をひとつとる.

- $dp(T_{(u_0,v_0)}U) := \mathrm{Span}\{p_u(u_0,v_0), p_v(u_0,v_0)\}$
  ：(u_0,v_0) における p の接ベクトル空間.

各 (u,v) において

$$\mathbb{R}^3 = dp(T_{(u_0,v_0)}U) \oplus \mathbb{R}\nu(u_0,v_0)$$

なる直交直和分解がある. これに従って $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}$$

と分解する.

測地線

定義

曲面上の正則曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$（パラメータは弧長とは限らない）が

- 準測地線 $\Leftrightarrow$ 各 t で $[\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}}$ が $\dot{\gamma}(t)$ と一次従属.
- 測地線 $\Leftrightarrow$ 各 t で $[\ddot{\gamma}(t)]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$.

測地線と準測地線

命題

曲面上の曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ が,

- 測地線ならば，$|\dot{\gamma}(t)|$ は t によらず一定である.
- 準測地線ならば，パラメータを弧長に取り替えれば測地線である.

測地線と準測地線

例

- 曲面上にのっている直線が存在するならばこれは準測地線である.
- 球面の大円（中心を通る平面と球面の共通部分）は準測地線である.

測地線の性質

事実

- 曲面上の 2 点を結ぶ曲線のうち，長さ最小のものが存在するならばそれは準測地線である．
- 曲面上の点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ に対し，$\gamma(0) = \mathrm{P}$, $\dot{\gamma}(0) = \boldsymbol{v} \in dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ となる測地線 γ が十分小さい t の範囲でただ一つ存在する．

問題 6-1

問題

曲面 $p(u,v)=(u,v,0)$, $q(u,v)=(u\cos v, u\sin v, v)$ の第一基本量，平均曲率を計算して，平均曲率が「内的な量」でないことを示しなさい．

問題 6-2

問題

曲面 $p\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^3$ を
$p(u,v) := (\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v-\tanh v)$ で与えるとき,
uv-平面上の曲線 $L_a := \{(u,v)\,;u=a, v>0\}$,
$C_{a,b} := \{(u,v)\,;(u-a)^2+\cosh^2 v=b^2, v>0\}$ に対応する曲面上の曲線は準測地線であることを示しなさい．ただし $a\in\mathbb{R}$,
$b\in(1,\infty)$ は定数である.