2022 年 1 月 27 日 (2022 年 2 月 3 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 6

■お知らせ

- 今回は 26 名の方から課題の提出がありました．
- 本日，定期試験の予告を行います．試験は対面・オンラインのハイブリッドで実施する予定です．
- 今回が最後の課題となります．締切は 1 月 31 日 07:00 JST です．

■前回の補足

- 「可積分条件」という言葉の「何が可積分なのか」というご質問が複数ありました．一般に「微分方程式を解く」ことを慣用句的に「積分する」ということがあります．微分方程式が解をもつための十分条件（実は局所的には必要条件でもある）なので可積分条件とよんでいます．

■前回までの訂正

- 講義資料 5, 3 ページ，式 (5.2)，${}^t\mathcal{F}\mathcal{F} =$ の次の行列の第 3 行：$\nu \Rightarrow {}^t\nu$
- 講義資料 5, 3 ページ，式 (5.3) のただし以下左辺の (2,2) 成分および式 (5.4) の中辺の右側の行列の (2,2) 成分：$\Gamma_{12}^2(=\Gamma_{12}^1) \Rightarrow \Gamma_{12}^2(=\Gamma_{21}^2)$
- 講義資料 5, 4 ページ 2 行目：真ん中の行列の第 3 行：$(L, M, N) \Rightarrow (2L, 2M, 2N)$
- 講義資料 5, 4 ページ 4 行目：
  式 (??) の最初の 2 式をガウス・ワインガルテンの公式 ⇒ 式 (5.3) の最初の 2 式をガウスの公式
- 講義資料 5, 4 ページ 10 行目：$\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_u\Omega + \mathcal{F}\Omega_u = \mathcal{F}\Lambda\Omega + \mathcal{F}\Omega_u$, $\mathcal{F}_{vu} = \mathcal{F}\Omega\Lambda + \mathcal{F}\Omega V$
  $\Rightarrow \mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_v\Omega + \mathcal{F}\Omega_v = \mathcal{F}\Lambda\Omega + \mathcal{F}\Omega_v$, $\mathcal{F}_{vu} = \mathcal{F}\Omega\Lambda + \mathcal{F}\Lambda_u$
- 講義資料 5, 4 ページ，定理 5.4 の 2 行目：
  (5.5) を満たすならば ⇒ (5.5), $E > 0,\ G > 0,\ EG - F^2 > 0$ を満たすならば

■授業に関する御意見

- ワインガルテンがワインカツレテンに見える　　**山田のコメント：** それは何！
- 今年の共通テストの数 IA が難しかったと話題のようですね．山田先生は問題をみられましたか？　　**山田のコメント：** まだ．
- スライドをページのようにせずに上下の連続表示にすれば，直前のスライドに書いたことを繰り返さなくて済むのではないでしょうか？
  山田のコメント： なるほど．いまフォーマットを変えるのはめんどくさいので，次学期に検討します．プリントアウトしようと思うと面倒ですね．
- 問題 5-2 についてですが，Ω と Λ を求めるのにもかなり苦労しましたが，最後の「$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega$」を求めるのが非常に大変でした．何か計算の区夫（山田注：工夫のこと？）などはあるのでしょうか．　　**山田のコメント：** あまりない．
- 今回の講義で扱った「可積分条件」が固体力学で出てくる変形を表す変形勾配テンソル F の適合条件 $\operatorname{rot} F = O$ と関係ありそうだなと思いました．
  山田のコメント： はい．これも「ポテンシャル」の存在条件，すなわちある種の微分方程式の解の存在条件ですね．

■質問と回答

質問 1： フレネ枠とは異なり，ガウス枠が正規直交基でないことが気になりました．もし，正規直交基を考えるとしたらうまい取り方はありますか？

お答え： (1) $\{p_u, p_v, \nu\}$ が正規直交系をなすようなパラメータ (u, v) は一般に存在しない．実際，もしもこれらが正規直交系なら $ds^2 = du^2 + dv^2$ となるが，このとき，ガウスの方程式（今回やる）より $K = 0$ とならなければならない．(2) したがって，正規直交基を考えるときは p_u, p_v などと別に考える必要がある．その際「標準的な正規直交基の取り方」はとくにないので，「正規直交基のとりかたによらない」量を見出す必要がある．テキストの第 III 章で扱っている．

質問 2： ガウス・ワインガルテンの公式の可積分条件・適合条件があるおかげで第一基本量，第二基本量の内，5 つだけ値が定まっていれば，一意に曲面がさだまるということでしょうか．

お答え： 可積分条件は「3 本の等式」になります．

質問 3： 平面曲線（空間曲線）は 1 つ（独立した 2 つ）の量で定まっていました．曲面論の基本定理によれば，曲面は 6 つの量に条件がついた形で定まるということですが，独立した量で定めるのは難しいのでしょうか？ 定まるとしたら，何個の独立な量が存在すればいいのでしょうか．

お答え： E, F, G, L, M, N はパラメータの取りかたによる量だから，これからいくつかを「選ぶ」のはあまり意味がなさそう．可積分条件は 3 本の式（問題 5-1 参照）なので，独立なのは 3 つのはずなのですが．

質問 4： 第一基本量，第二基本量のうち 5 つを決定したとき，可積分条件を満たすような決定しない残りの 1 つを取ることは常に可能でしょうか？ あるいは 5 つを決定した段階で可積分条件を満たさないことが確定する場合があるのでしょうか？

お答え： 可積分条件は，一般に 3 本の等式．

質問 5： 空間曲線の基本定理より，3 次元の曲線（山田注：3 次元空間内の曲線のことか？）は自由度 2（κ, τ）であることが分かりました．今回の空間曲面（山田注：3 次元空間内の曲面のことか？）の基本定理では自由度はどのくらいでしょうか？ 6 つの変数（$EFGLMN$）で表せることは分かったので自由度は 6 以下であり，可積分条件をみたすので 9 つの束縛式（3×3 の各成分）があるので $6-9$ が自由度？

お答え： 可積分条件のうち独立なものは 3.

質問 6： 適合条件を満たさないとき，$\mathcal{F}_u\,du+\mathcal{F}_v\,dv=d\mathcal{F}$ を利用して ${}^t(du,dv)$ 移動したときの $\mathcal{F}$ を更新できますか？（以下略）

お答え： $(u,v)\to(u+du,v)\to(u+du,v+dv)$ という経路で $\mathcal{F}$ を求めるのと $(u,v)\to(u,v+dv)\to(u+du,v+dv)$ という経路で $\mathcal{F}$ を求めるのでは一般に値が違います．これが（無限小レベルで）一致することを保証するのが適合条件．

質問 7： 曲線論でも可積分条件に対応する何かってありましたっけ？

お答え： いいえ．常微分方程式では微分の順序交換がないので．

質問 8： クリストッフェル記号の添字にはどのような意味がありますか．

お答え： (u,v) の代わりに添字を用いて (u^1,u^2) と書くと，$\left[\partial^2 p/\partial u^i\partial u^j\right]^{\mathrm{T}}=\sum_{k=1}^2\Gamma_{ij}^k\partial p/\partial u^k$．ただし $[\ ]^{\mathrm{T}}$ は曲面に接する成分（今回の講義）.

質問 9： クリストッフェル記号は 3 階のテンソルなのですか？

お答え： いいえ．3 添字記号ですが，テンソルではありません．

質問 10： “Γ_{ij}^k をクリストッフェル記号という” と講義資料にありますが，上と下に添え字があることを指しているのですか？ それとも “Γ_{ij}^k” を指しているのでしょうか？ **お答え：**後者.

質問 11： $\gamma\colon\mathbb{R}\supseteq I\to\mathbb{R}^2$ からフルネの公式 $\mathcal{F}'=\mathcal{F}\Omega$, $p\colon\mathbb{R}^2\supseteq U\to\mathbb{R}^3$ からガウス・ワインガルテンの式 $\mathcal{F}_u=\mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}_v=\mathcal{F}\Lambda$ ができた．同様に $\varphi\colon\mathbb{R}^3\supset U\to\mathbb{R}^4$ を四次元空間上の曲面（原文ママ：超曲面）について，$\mathcal{F}_x=\mathcal{F}\Omega$, $\mathcal{F}_y=\mathcal{F}\Lambda$, $\mathcal{F}_z=\mathcal{F}\Xi$ なるよい性質をもった Ω, Λ, $\Xi\in\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ はあるのか． **お答え：**はい

質問 12： $(n-1)$ 次元多様体（超曲面というらしい…？）についても第一・第二基本形式やガウス曲率などは定まるのでしょうか？

お答え： $\mathbb{R}^n$ の $(n-1)$ 次元部分多様体ですね．第一，第二基本形式は同様に定義できます．ワインガルテン行列が $(n-1)$ 次正方行列なので，不変量がたくさんでてきます．とくに，すべての固有値の積は “ガウス・クロネッカー曲率” と呼ばれます．

質問 13： $p\colon\mathbb{R}^2\supseteq U\to\mathbb{R}^4$ の曲面の各点でガウス枠のようなものを取る場合，接ベクトル 2 つに加えて単位法ベクトルも 2 ついるようになるのでしょうか．

お答え： はい．

質問 14： 問題 4-1（山田注：5-1 のこと？）において，可積分条件（略）の $(1,2)$ 成分から $\Delta\sigma=e^{-2\sigma}(LN-M^2)$ という式が得られ（山田注：たぶん符号が違う）ガウス曲率 K は $K=e^{-2\sigma}\Delta\sigma$ とかけ第一基本形式だけで決まることが分かりました．一般の曲面でもガウス曲率が第一基本形式で決まるという話をきいたことがあるので考えてみたところ，次のような証明ができました．正しいですか？ 可積分条件の $(1,2)$-成分より…（以下略）

お答え： 正しいです．今回説明します．

質問 15： 第二基本量は ν の向きで正負が変わると思うのですが，(E,F,G,L,M,N) から定理 5.4 により導かれる曲面と $(E,F,G,-L,-M,-N)$ から同様に導かれる曲面は（合同変換をのぞいて）必ず一致しますか？

お答え： データ (E,F,G,L,M,N) から定まる行列 Ω, Λ に対応して $(E,F,G,-L,-M,-N)$ から定まる行列 $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{\Lambda}$ を考えると，$\widetilde{\Omega}=D\Omega D$, $\widetilde{\Lambda}=D\Lambda D$．ただし $D:=\mathrm{diag}(1,1,-1)$（対角行列）．このとき，$\mathcal{F}$ が式 (5.2) を満たすならば $\widetilde{F}:=\mathcal{F}D$ は $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{\Lambda}$ に対応するガウス・ワインガルテン方程式をみたす．$\widetilde{F}$ は $\mathcal{F}$ の第 3 列の符号を変えたものだから，対応する曲面は，$\mathcal{F}$ から定まる曲面と同じもの．

質問 16： 臍点においてワインガルテン行列が単位行列のスカラー倍となることを対角化可能であることから示していましたが，臍点において法曲率が一定であることと，講義資料 4 の定理 4.4 より任意の方向がワインガルテン行列の固有ベクトルとなることからも従うのではないか，と考えました．正しいですか？

お答え： 正しいです．

質問 17： 教科書付録 B，正積地図について，地球を楕円球と考えると，棒を光源とする投影では上手く行かない．そこで，得られたグラフ（地図）$p=p(x,y)$（x は経線方向，y は極方向）に対し，赤道を y 座標 0 として，y 座標 λ の点を x 座標はそのまま，y 座標を $\int_0^\lambda\frac{\sqrt{y^2(x^2-k^2)+x^2k^2}}{x^2}dk$ の点に写すことで正積地図が得られる（はず）.

お答え： よくわからないのですが，回転楕円面の母線の離心率はどこに反映されますか？

質問 18： 正則曲面 p を空間曲線 γ に近づける等のことをして，ガウス・ワインガルテンの公式の特別な場合としてフルネ・セレの公式を与えることはできるのでしょうか．

お答え： 考えたことがなかったです．曲面が曲線に崩壊すると，p_u, p_v が一次従属になるので，別のフレームを見つけないといけないですね．

質問 19： 法曲率は以前やりましたが，接曲率や展直曲率はありますか？ あったら曲面が決まりそうな気がしなくもないですがどうですか？（証明はできない．なんとなくある点で独立な 3 方向の曲率が決まれば近傍の点もきまりそうだと思った）.

お答え： 「方向」を特定するのが難しそう．接曲率については今回説明する測地的曲率が近い（前回予告した）.

6 ガウス方程式・測地線

ここでは断りのない限り $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級正則曲面，ν を p の単位法ベクトル場，$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ を第一基本形式，$I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ を第二基本形式とする．

■フルネ枠と可積分条件（復習） 行列値関数 $\mathcal{F} = (p_u, p_v, \nu)\colon U \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ を**ガウス枠**と呼ぶ．

定理 6.1 (ガウス・ワインガルテンの公式)**.** 曲面 $p = p(u,v)$ のガウス枠 $\mathcal{F}$ は次を満たす：

$$(6.1)\quad \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\Omega, \quad \mathcal{F}_v = F\Lambda, \quad \left(\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{ただし}\quad \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1(=\Gamma_{21}^1) & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2(=\Gamma_{21}^2) & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} := \frac{1}{2}\widehat{I}^{-1}\begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

命題 6.2 (可積分条件)**.** 式 (6.1) で定義された Ω, Λ は次を満たす：

$$(6.2)\qquad \Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O.$$

■ガウス方程式・コダッチ方程式 行列値関数 Ω, Λ の各成分は E, F, G とその 1 階までの偏導関数および L, M, N で表されるから，(6.2) は E, F, G とその 2 階までの偏導関数および L, M, N とその 1 階までの偏導関数の 9 本の等式だが，問題 5-1 の例のように独立な等式は 3 本となる．

そのうち，E, F, G の 2 階偏導関数を含む 1 本を**ガウス方程式**，残りの 2 本を**コダッチ方程式**という．

ガウス方程式は一般にテキスト 111 ページ (10.10) 式 の形をしている．このことから

事実 6.3. 曲面のガウス曲率 K は，第一基本量 E, F, G とその 2 階までの偏導関数で表すことができる．

ことがわかる．これを**ガウスの驚異の定理**という．このことから "正確な地図は存在しない" ことが次のようにしてわかる：

- 球面上の領域がパラメータ (u,v) で表示されているとして，第一基本量を ds^2 とする．正確な地図（uv-平面上の曲線の長さが球面上の対応する曲線の長さと一致する）から，$ds^2 = du^2 + dv^2$.
- $ds^2 = du^2 + dv^2$ ならガウス曲率は 0 でなければばならない．一方，球面のガウス曲率は正の定数である．

■準測地線と測地線 曲面上の点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ に接する方向 $p_u(u_0,v_0)$, $p_v(u_0,v_0)$ が生成するベクトル空間（接ベクトル空間）を $dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ と書く（講義資料 2, 3 ページ参照）と，$\mathbb{R}\nu(u_0,v_0)$ は接ベクトル空間の直交補空間だから，各 (u_0,v_0) ごとに直交直和分解 $\mathbb{R}^3 = dp(T_{(u_0,v_0)}U) \oplus \mathbb{R}\nu(u_0,v_0)$ が成立する．この直和分解にしたがって，ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}$ と分解するとき，右辺第一項を $\boldsymbol{v}$ の（P における）**接成分**, 第二項を **法成分**という．とくに $[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} = (\boldsymbol{v}\cdot\nu(u_0,v_0))\nu(u_0,v_0)$ である．

曲面上の正則曲線 $\gamma(t) = p(u(t),v(t))$ の速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ は曲面に接するが，加速度ベクトル $\ddot\gamma(t)$ は一般にそうでない．そこで，各 t において $\gamma(t)$ における直交分解 $\ddot\gamma(t) = [\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}} + [\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{N}}$ を考える[*1].

2022 年 1 月 27 日 (2022 年 2 月 3 日訂正)

[*1] もしも t が γ の弧長パラメータなら $[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{N}} = \kappa_n(t)\nu(u(t),v(t))$ である．ただし κ_n は γ の法曲率．さらにこのとき，

定義 6.4. 曲面上の正則曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$（パラメータは弧長とは限らない）が**準測地線**であるとは，各 t で $[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}}$ が $\dot\gamma(t)$ と一次従属となることである．また γ が **測地線**であるとは，各 t で $[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ を満たすことである．

命題 6.5. 曲面上の曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ が，

- 測地線ならば，$|\dot\gamma(t)|$ は t によらず一定である．
- 準測地線ならば，パラメータを弧長に取り替えれば測地線である．

証明： 曲線 γ が測地線ならば，$\dot\gamma \perp \nu$ であることに注意すれば $\frac{d}{dt}|\dot\gamma(t)|^2 = 2\ddot\gamma\cdot\dot\gamma = 2\,[\ddot\gamma]^{\mathrm{T}}\cdot\dot\gamma = 0$．したがって第一の主張が得られる．一方，$\gamma(t)$ が準測地線として $s = s(t)$ をその弧長関数とすると，$ds/dt = |\dot\gamma(t)|$ だから，$\hat\gamma(s) := \gamma(t(s))$（$t(s)$ は弧長関数の逆関数）として，単位接ベクトルを $\boldsymbol{e}(s) := d\hat\gamma(s)/ds = \dot\gamma(t(s))/|\dot\gamma(t(s))|$ とかくと，これは $\dot\gamma$ と平行．また $d^2\hat\gamma/ds^2$ は $\dot\gamma$, $\ddot\gamma$, ν の線形結合で表される．とくに準測地線であることから $\left[d^2\hat\gamma/ds^2\right]^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{e}$ と平行．一方 $\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma(s) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}(s)$ は単位ベクトル $\boldsymbol{e}(s)$ の微分だから $\boldsymbol{e}(s)$ に直交する．とくに $\left[\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma(s)\right]^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{e}(s)$ に平行．したがって $\left[\frac{d^2}{ds^2}\hat\gamma(s)\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$.

このことから測地線の概念は曲線のパラメータのとり方に依存するが，準測地線は曲線のパラメータによらないことが分かる．曲線 γ が準測地線となるための必要十分条件は $\det(\dot\gamma, \ddot\gamma, \nu) = 0$ となることである．これを $(u(t), v(t))$ の式で表すと $\ddot u$, $\ddot v$ について解くことが一般にできないので微分方程式とはならないが，測地線は次のように微分方程式で特徴づけられる．

命題 6.6 (測地線の方程式)**.** 曲面上の曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ が測地線であるための必要十分条件は

$$\ddot u + \dot u^2\Gamma_{11}^1 + 2\dot u\dot v\Gamma_{12}^1 + \dot v^2\Gamma_{22}^1 = 0, \qquad \ddot v + \dot u^2\Gamma_{11}^2 + 2\dot u\dot v\Gamma_{12}^2 + \dot v^2\Gamma_{22}^2 = 0$$

を満たすことである．

例 6.7.
- 曲面上にのっている直線が存在するならばこれは準測地線である．
- 球面の大円（中心を通る平面と球面の共通部分）は準測地線である．

事実 6.8.
- 曲面上の 2 点を結ぶ曲線のうち，長さ最小のものが存在するならばそれは準測地線である．
- 曲面上の点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ に対し，$\gamma(0) = \mathrm{P}$，$\dot\gamma(0) = \boldsymbol{v} \in dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ となる測地線 γ が十分小さい t の範囲でただ一つ存在する．

問題

6-1 曲面 $p(u, v) = (u, v, 0)$, $q(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ の第一基本量，平均曲率を計算して，平均曲率が「内的な量」でないことを示しなさい．

6-2 曲面 $p\colon \mathbb{R}\times(0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ を $p(u, v) := (\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v - \tanh v)$ で与えるとき，uv-平面上の曲線 $L_a := \{(u, v)\,;\, u = a, v > 0\}$, $C_{a,b} := \{(u, v)\,;\, (u-a)^2 + \cosh^2 v = b^2, v > 0\}$ に対応する曲面上の曲線は準測地線であることを示しなさい．ただし $a \in \mathbb{R}$, $b \in (1, \infty)$ は定数である．

$[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\kappa}_t(t)$ を**測地的曲率ベクトル**とよぶ．これは $\dot\gamma(t)$，$\nu(u(t), v(t))$ に直交するベクトルである．