幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス・ボンネの定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/02/03

問題 6-1

問題

訂正した．

曲面 $p(u,v)=(u,v,0)$, $q(u,v)=(\cos u, \sin u, v)$ の第一基本量，平均曲率を計算して，平均曲率が「内的な量」でないことを示しなさい．

内的な量：(一般に) 第一基本量のみで表される量

Gauss曲率は内的 (Gaussの驚異の定理)

e.g. $ds^2 = e^{2\sigma}(du^2+dv^2)$ (等温座標)

$\Rightarrow K = -e^{-2\sigma}\Delta\sigma$ ($\Delta\sigma = \sigma_{uu}+\sigma_{vv}$)

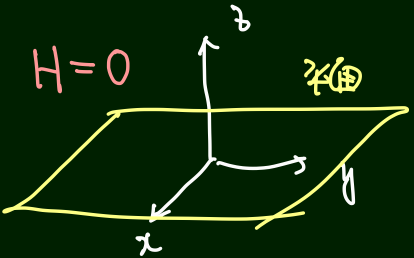
平均曲率は？ 内的でない

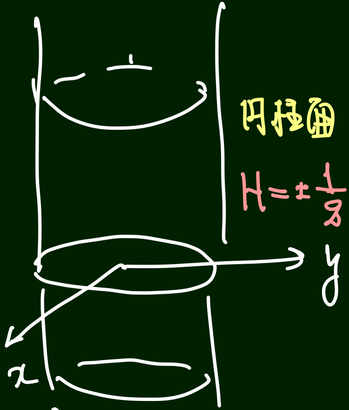
ds^2が共通で，Hが異なる例をひとつ挙げればよい

① $p(u,v) = (u,\ v,\ 0)$

② $q(u,v) = (\cos u,\ \sin u,\ v)$

$H=0$





円柱面

$H = \pm\frac{1}{2}$

• $\boxed{ds^2 = du^2 + dv^2}$ $(K = 0)$

"平たい" → □ なるパラメータがとれる

テキスト付B-4

§3 線織曲面 $p(u,v) = \gamma(u) + v\,\delta(u)$

高次元化

$$p : \mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$ 超曲面

ds^2, $\hat{\mathrm{I}}$, ν, $\hat{\mathrm{II}}$, A : well-defined

Aの固有値 : $\lambda_1 \cdots \lambda_n$

☆ $H = \frac{1}{n} \sum \lambda_j$

☆ $K = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

Gauss-Kronecker 曲率

(n : even 内的.)

問題 6-2

問題

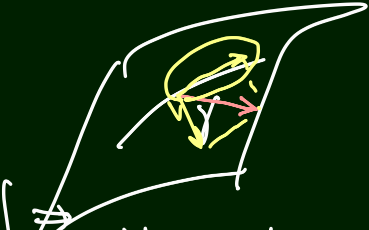
曲面 $p\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^3$ を
$p(u,v) := {}^t(\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v-\tanh v)$ で与えるとき，
uv-平面上の曲線 $L_a := \{(u,v)\,;\,u=a, v>0\}$,
$C_{a,b} := \{(u,v)\,;\,(u-a)^2+\cosh^2 v = b^2, v>0\}$ に対応する曲面上の曲線は準測地線であることを示しなさい．ただし $a\in\mathbb{R}$, $b\in(1,\infty)$ は定数である．

$\gamma(t) = p(u(t), v(t))$:

準測地線 $\Leftrightarrow [\ddot\gamma]^T \,/\!/\, \dot\gamma$

$\boxed{\text{パラメタ変換}}$

測地線 $\Leftrightarrow [\ddot\gamma]^T = 0$ $\Rightarrow$



$|\dot\gamma| = \text{const.}$

準測地線 $\Longleftrightarrow [\ddot{\gamma}]^{T} \parallel \dot{\gamma}$ $\qquad$ $\underline{\ddot{\gamma} = [\ddot{\gamma}]^{T} + [\ddot{\gamma}]^{N}}$

$\Longleftrightarrow \ddot{\gamma} \in \mathrm{Span}\{\dot{\gamma}, \nu\}$

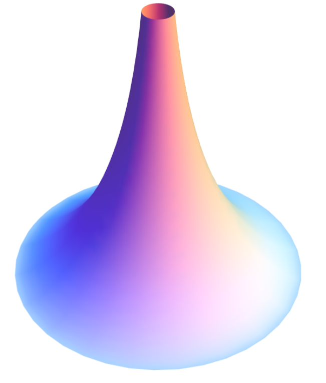
$\Longleftrightarrow (\dot{\gamma}\ \ddot{\gamma}\ \nu)$: 一次従属

$\Longleftrightarrow \det(\dot{\gamma}\ \ddot{\gamma}\ \nu) = 0$.

問題 6-2

$\boldsymbol{e}_1 := {}^t(\cos u, \sin u, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 := {}^t(-\sin u, \cos u, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 := {}^t(0, 0, 1)$ 正規直交

- $p(u, v) = \operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_1 + (v - \tanh v)\, \boldsymbol{e}_3$.
- $p_u = \operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_2$, $\quad p_v = \tanh v(-\operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_1 + \tanh v\, \boldsymbol{e}_3)$,
  $\nu = \tanh v\, \boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_3$.
- $ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2$.
- $I\!I = -\tanh v \operatorname{sech} v(du^2 - dv^2)$.
- $K = -1$.



$K=-1$ 　(単位)
(球面 $K=1$)

球面とにている

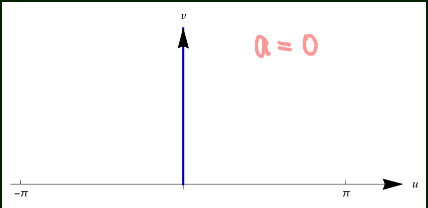
擬球面 pseudosphere 　Beltrami's

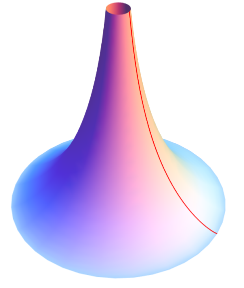
$$L_a := \{(a, v)\,;\, v \geqq 0\}\,;$$ $(v>0)$

$$\gamma(v) := p(a, v) = \operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_1(a) + (v - \tanh v)\, \boldsymbol{e}_3$$

- $\dot\gamma = \tanh v(-\operatorname{sech} v\boldsymbol{e}_1 + \tanh v\boldsymbol{e}_3).$ $= p_v$
- $\ddot\gamma = (*)\dot\gamma + \tanh v \operatorname{sech} v\underbrace{(\tanh v\boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sech} v\boldsymbol{e}_3)}_{\nu}$

$\Rightarrow \ddot\gamma \in \operatorname{Span}(\dot\gamma, \nu)$

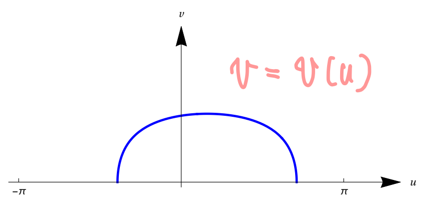


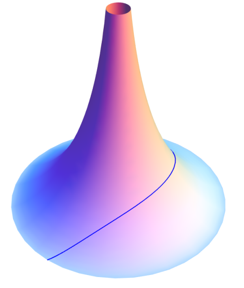


問題 6-2

$$C_{a,b} := \{(u,v)\,;\,(u-a)^2+\cosh^2 v = b^2, v>0\};$$
$$\gamma(u) := \boxed{p(u,v(u))}\quad (u-a)^2+\cosh^2 v(u) = b^2.$$

$(b>1)$





問題 6-2

$\gamma(u) := p(u, v(u)),\ (u-a)^2 + \cosh^2 v(u) = b^2$ → $2(u-a) + 2\cosh v \sinh v\,\dot{v} = 0$

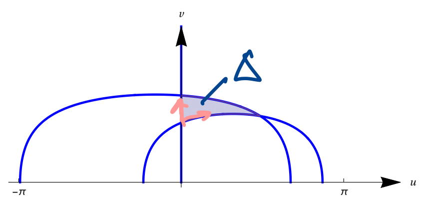
- $\dot{v} = -(u-a)\operatorname{sech} v \operatorname{cosech} v.$
- $\gamma = \operatorname{sech} v\,\boldsymbol{e}_1 + (v - \tanh v)\boldsymbol{e}_3.$ $\quad v = v(u)$
- $\dot{\gamma} = \boxed{\operatorname{sech} v}\big((u-a)\operatorname{sech}^2 v\,\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - (u-a)\operatorname{sech} v \tanh v\,\boldsymbol{e}_3\big).$ $\quad \cdot = \frac{d}{du}$
- $\ddot{\gamma} = (*)\dot{\gamma} + (b^2 \operatorname{sech}^4 v - 1)\operatorname{cotanh} v(\tanh v\,\boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sech} v\,\boldsymbol{e}_3)$

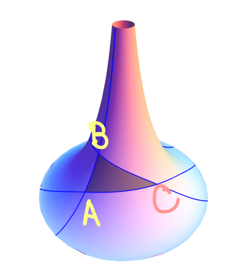
$$\ddot{\gamma} = (*)\dot{\gamma} + \operatorname{sech} v\left(-☆\,e_1 + \underline{(u-a)\operatorname{sech}^2 v\; e_2} + ☆\,e_3\right)$$

$$\nu = \tanh v\, e_1 + \operatorname{sech} v\, e_3$$

$$= (*)\dot{\gamma} + (\cdots)\quad \nu \text{ と平行}$$

測地線：曲面上の"直線"

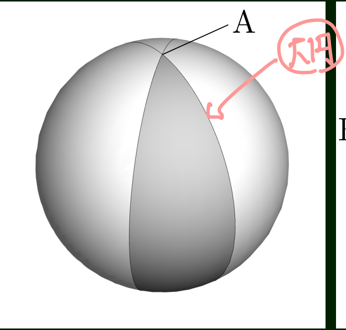


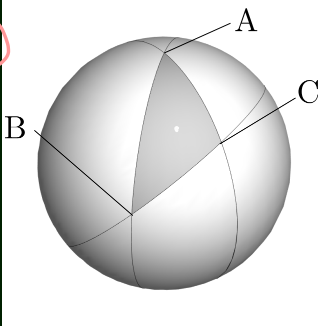


$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi - \Delta ABC$$

$$\Delta ABC = \iint_{\Delta} \tanh v \operatorname{sech} v \, du\, dv$$

球面上の三角形





$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \triangle ABC$$