幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス・ボンネの定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/02/03

問題 6-1

問題

曲面 $p(u,v)=(u,v,0)$, $q(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$ の第一基本量, 平均曲率を計算して, 平均曲率が「内的な量」でないことを示しなさい.

問題 6-2

問題

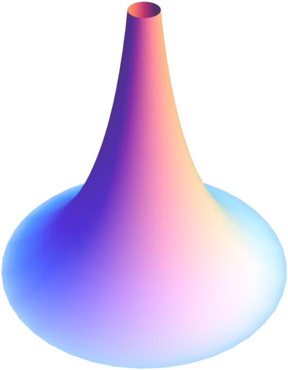
曲面 $p\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^3$ を
$p(u,v) := (\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v-\tanh v)$ で与えるとき，
uv-平面上の曲線 $L_a := \{(u,v)\,;u=a, v>0\}$，
$C_{a,b} := \{(u,v)\,;(u-a)^2+\cosh^2 v = b^2, v>0\}$ に対応する曲面上の曲線は準測地線であることを示しなさい．ただし $a\in\mathbb{R}$，$b\in(1,\infty)$ は定数である．

問題 6-2

$$\boldsymbol{e}_1 := {}^t(\cos u, \sin u, 0),\ \boldsymbol{e}_2 := {}^t(-\sin u, \cos u, 0),\ \boldsymbol{e}_3 := {}^t(0,0,1)$$

- $p(u,v) = \operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_1 + (v - \tanh v)\, \boldsymbol{e}_3.$
- $p_u = \operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_2,\quad p_v = \tanh v(-\operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_1 + \tanh v\, \boldsymbol{e}_3),$
  $\nu = \tanh v\, \boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_3.$
- $ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2.$
- $I\!I = -\tanh v \operatorname{sech} v(du^2 - dv^2).$
- $K = -1.$

問題 6-2

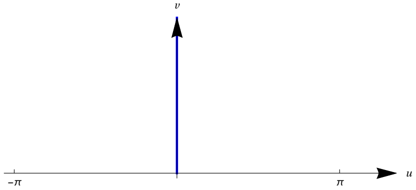


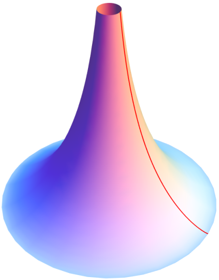
擬球面 pseudosphere

問題 6-2

$$L_a := \{(a,v)\,;\, v=0\}\ ;$$
$$\gamma(v) := p(a,v) = \operatorname{sech} v\, \boldsymbol{e}_1(a) + (v - \tanh v)\, \boldsymbol{e}_3$$

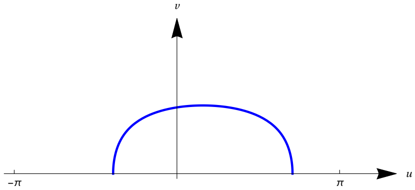
- $\dot{\gamma} = \tanh v(-\operatorname{sech} v\boldsymbol{e}_1 + \tanh v\boldsymbol{e}_3)$.
- $\ddot{\gamma} = (*)\dot{\gamma} + \tanh v \operatorname{sech} v(\tanh v\boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sech} v\boldsymbol{e}_3)$

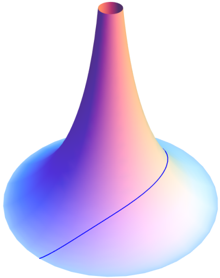




問題 6-2

$$C_{a,b} := \{(u,v)\,;(u-a)^2+\cosh^2 v = b^2, v>0\};$$
$$\gamma(u) := p(u, v(u)),\ (u-a)^2+\cosh^2 v(u) = b^2.$$



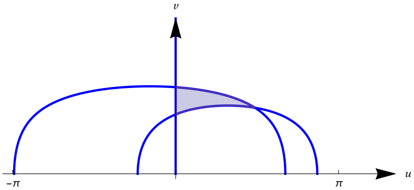


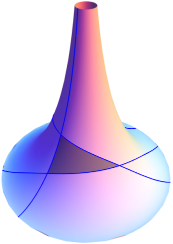
問題 6-2

$\gamma(u) := p(u, v(u))$, $(u-a)^2 + \cosh^2 v(u) = b^2$

- $\dot{v} = -(u-a)\operatorname{sech} v \operatorname{cosech} v$.
- $\gamma = \operatorname{sech} v\boldsymbol{e}_1 + (v - \tanh v)\boldsymbol{e}_3$.
- $\dot{\gamma} = \operatorname{sech} v\bigl((u-a)\operatorname{sech}^2 v\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - (u-a)\operatorname{sech} v \tanh v\boldsymbol{e}_3\bigr)$.
- $\ddot{\gamma} = (*)\dot{\gamma} + (b^2\operatorname{sech}^4 v - 1)\operatorname{cotanh} v(\tanh v\boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sech} v\boldsymbol{e}_3)$

擬球面上の三角形





球面上の三角形