幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス・ボンネの定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

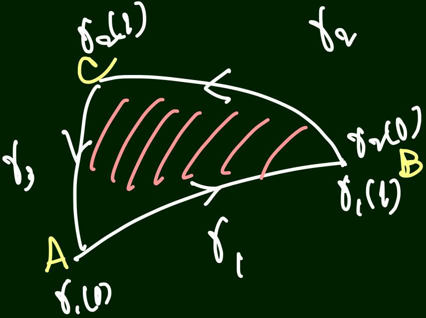
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

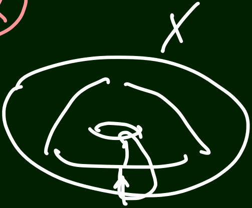
2022/02/03

曲面上の（測地）三角形

- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面
- $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$：測地線 $(0 \leqq t \leqq 1)$.
- $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \mathrm{B}$, $\gamma_2(1) = \gamma_3(0) = \mathrm{C}$, $\gamma_3(1) = \gamma_1(0) = \mathrm{A}$
- γ_1, γ_2, γ_3 をつなげたループが閉円板と同相な閉領域 $\Delta\mathrm{ABC}$ を囲む.



円板



三角形のガウス・ボンネの定理 → 大域的な性質

(パラメータ空間を $\mathbb{R}^2$ の領域とするだけでは不十分 → 多様体

定理 (ガウス・ボンネの定理，テキスト 定理 10.6)

Gauss-Bonnet

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = \pi + \underbrace{\iint_{\triangle \mathrm{ABC}} K \, dA}_{\text{(Gauss曲率の総和)}} \qquad (dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv).$$

$K = 1$

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \triangle ABC$$

$K = -1$

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi - \triangle ABC$$

2 次元多様体

定義

$\mathbb{R}^2$の領域の貼り合わせでできる位相空間

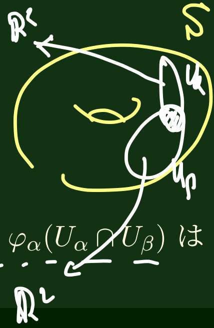
2 次元（可微分）多様体 $(S; \{U_\alpha, \varphi_\alpha\})$ とは

- S: 第二可算公理を満たすハウスドルフ空間 (位相空間)
- $\{U_\alpha\,;\,\alpha \in A\}$: S の開集合族
- $\{\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^2\,;\,\alpha \in A\}$: 連続写像の族

で次を満たすもの：

同一視

1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = S$
2. $\varphi_\alpha : U_\alpha$ から $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^2$ への同相写像
3. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ なら $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ は微分同相写像.



大域的な（正則）曲面：

- $S = (S; \{U_\alpha, \varphi_\alpha\})$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $\boxed{p \colon S \to \mathbb{R}^3}$.
- 各 α に対し，$p \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}^3$ が正則曲面

閉曲面のガウス・ボンネの定理

定理 (テキスト，定理 10.7)　閉曲面

コンパクトで向き付けられた 2 次元多様体 S 上で定義された大域的な正則曲面 $p\colon S \to \mathbb{R}^3$ に対して

位相不変量　頂点 − 辺 + 面)

全曲率　gからきまる

$$\int_{\cancel{M}\, S} K\,dA = 2\pi\chi(S) = \boxed{2\pi(2-2g)}$$

Euler 数 (三角形分割の

が成り立つ．ただし K, dA はそれぞれ曲面のガウス曲率，面積要素，$\chi(S)$ は S のオイラー数，g は閉曲面 S の種数である（テキスト §10 参照）．

閉曲面の分類

「微分幾何的量(の総和)

＝位相不変量」

$$\iint_S K\,dA = 4\pi$$

球面と同相

「内的な不変量」 (S, ds^2) ← リーマン多様体

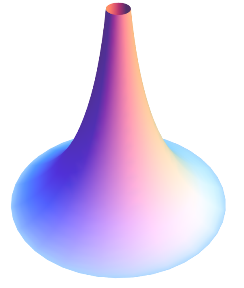
(今：わすれる)

リーマン多様体の例（双曲平面）

(S, ds^2)：2 次元リーマン多様体

曲面の $\mathbb{R}^3$ ではうれれない

- S: 2 次元多様体.
- 各 $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha))$ において $ds^2_\alpha = E\,du^2_\alpha + 2F\,du_\alpha\,dv_\alpha + G\,dv^2_\alpha$ が与えられていて座標変換により適切な成分の変換則を満たす.
- $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$.



擬球面

$v > 0$

- $ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\,du^2 + \tanh^2 v\,dv^2$

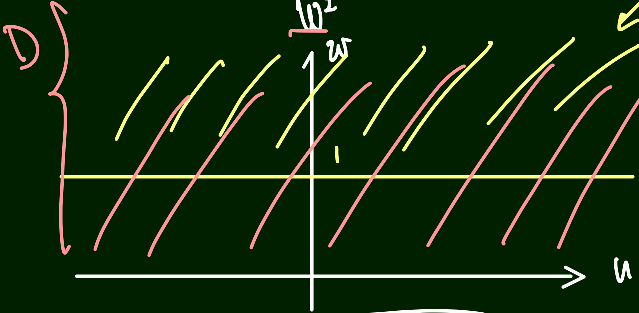
$ds^2 = \mathrm{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2 \qquad \{(u,v);\ v>0\} = S$

パラメータ変換 $\qquad w = \cosh v > 1$, dw

$$ds^2 = \mathrm{sech}^2 v\left(du^2 + (\sinh v \cdot dv)^2\right)$$

$$= \frac{1}{w^2}\left(du^2 + dw^2\right)$$

擬球面



ds^2自身はいみがある.

(D, ds^2): リーマン多様体

(双曲平面)

$\boxed{K = -1}$

擬球面　$K=-1$ だが 完備でない

$\underline{(D, ds^2)}$：双曲平面：完備　$K=-1$

✓ 非ユークリッド幾何の model

$\underline{\text{Thm}}$　双曲平面は $\mathbb{R}^3$ の曲面として実現できない

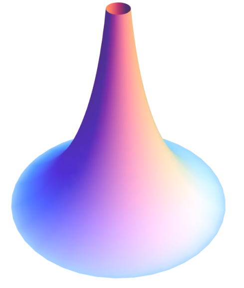
(Hilbert 1901)

ご聴講ありがとうございました.

学修アンケートにご協力ください

https://www.ks-fdcenter.net/fmane_titech/Ans?ms=t&id=titech&cd=7QHrRfr2

リーマン多様体の例（双曲平面）


擬球面

- $ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2$
- 座標変換 $w = \cosh v.$

ご聴講ありがとうございました.

学修アンケートにご協力ください

https://www.ks-fdcenter.net/fmane_titech/Ans?ms=t&id=titech&cd=7QHrRfr2