幾何学概論第二 (MTH.B212)

ガウス・ボンネの定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2021/geom-2/

東京工業大学理学院数学系

2022/02/03 (2022/01/27 訂正)

曲面上の（測地）三角形

- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$：正則曲面
- $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$：測地線 $(0 \leqq t \leqq 1)$.
- $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \mathrm{B}$, $\gamma_2(1) = \gamma_3(0) = \mathrm{C}$, $\gamma_3(1) = \gamma_1(0) = \mathrm{A}$
- γ_1, γ_2, γ_3 をつなげたループが閉円板と同相な閉領域 $\Delta\mathrm{ABC}$ を囲む.

三角形のガウス・ボンネの定理

定理 (ガウス・ボンネの定理，テキスト 定理 10.6)

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = \pi + \int_{\Delta \mathrm{ABC}} K\, dA \qquad \left(dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\right).$$

2次元多様体

定義

2次元（可微分）多様体 $(S; \{U_\alpha, \varphi_\alpha\})$ とは

- S: 第二可算公理を満たすハウスドルフ空間
- $\{U_\alpha\,;\,\alpha \in A\}$: S の開集合族
- $\{\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^2\,;\,\alpha \in A\}$: 連続写像の族

で次を満たすもの：

1. $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = S$
2. φ_α：U_α から $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^2$ への同相写像
3. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ なら $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ は微分同相写像.

大域的な（正則）曲面：

- $S = (S; \{U_\alpha, \varphi_\alpha\})$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $p\colon S \to \mathbb{R}^3$.
- 各 α に対し，$p \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}^3$ が正則曲面

閉曲面のガウス・ボンネの定理

定理 (テキスト，定理 10.7)

コンパクトで向き付けられた 2 次元多様体 S 上で定義された大域的な正則曲面 $p\colon S \to \mathbb{R}^3$ に対して

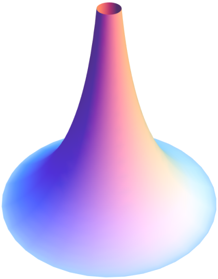
$$\int_M K\,dA = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2-2g)$$

が成り立つ．ただし K, dA はそれぞれ曲面のガウス曲率，面積要素，$\chi(S)$ は S のオイラー数，g は閉曲面 S の種数である（テキスト §10 参照）．

リーマン多様体の例（双曲平面）

(S, ds^2)：2次元リーマン多様体

- S: 2次元多様体.
- 各 $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha))$ において $ds_\alpha^2 = E\,du_\alpha^2 + 2F\,du_\alpha\,dv_\alpha + G\,dv_\alpha^2$ が与えられていて座標変換により適切な成分の変換則を満たす.
- $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$.



擬球面

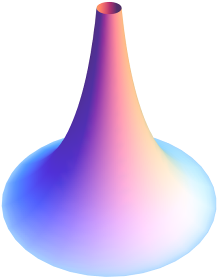
- $ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\,du^2 + \tanh^2 v\,dv^2$

ご聴講ありがとうございました.

学修アンケートにご協力ください

https://www.ks-fdcenter.net/fmane_titech/Ans?ms=t&id=titech&cd=7QHrRfr2

リーマン多様体の例（双曲平面）



擬球面

- $ds^2 = \operatorname{sech}^2 v\, du^2 + \tanh^2 v\, dv^2$
- 座標変換 $w = \cosh v$.

ご聴講ありがとうございました.

学修アンケートにご協力ください

https://www.ks-fdcenter.net/fmane_titech/Ans?ms=t&id=titech&cd=7QHrRfr2