2022 年 2 月 3 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 7

■お知らせ

- 今回は 29 名の方から課題の提出がありました．課題はこれで終わりです．
- 定期試験アンケートは 40 名ほどの方から提出いただきました．いまのところ対面・オンライン半々くらいです．今後，都合により受験方法を切り替える方は，メイルにてご連絡ください．
- 学修アンケートにご協力ください．

  `https://www.ks-fdcenter.net/fmane_titech/Ans?ms=t&id=titech&cd=7QHrRfr2`

■前回の補足

- 講義資料 6，3 ページの脚注は途中で切れていて 4 ページの脚注につながっています．
- 問題 6-2 の逆，つまり擬球面の準測地線は L_a, $C_{a,b}$ に対応する曲線以外に存在しないことを示してくださった方がいらっしゃいます．実際に測地線の方程式を満たすことと一意性からこのことが従いますね．

■前回までの訂正

- 講義資料 6, 1 ページ, 前回までの訂正 2 件目：行列の (2.2)-成分 ⇒ 行列の $(2,2)$-成分；$\Gamma^2_{12}(=\Gamma^2_{12}) \Rightarrow \Gamma^2_{12}(=\Gamma^2_{21})$

■授業に関する御意見

- 定期試験のアンケートを本当に回答できたか不安です．回答後に入力したメールアドレスに通知が来れば良いと思いました．
  山田のコメント： 回答できているようです．次回からは返信するようにしようと思います．
- 一般の曲面に対してガウス・ワインガルテンの公式を書き下してみようとしましたが，Ω, Λ を求めたところで億劫になってしまいました．期末試験までにはやりとげて Theorema egregium を自力で確認したいものです．　**山田のコメント：** なるほど．結構面倒くさいですよね．$p_{uuv}=p_{uvu}$ を p_u, p_v, ν の線型結合で書いて係数を比較するのですよね．
- 試験時に講義資料を IPad に入れて持ち込みも OK でしょうか？　**山田のコメント：** はい．
- 半年間ありがとうございました．試験がんばります！　**山田のコメント：** こちらこそありがとうございました．
- 山田先生が来年度に開講される幾何学の大学院科目を履修したいと思うのですが，多様体などの知識は必要ですか？
  山田のコメント： 局所座標がある，くらいは知っていて欲しいですが，あまり知らなくても聞けるようにしたい．

■質問と回答

質問 1： 曲線 γ が準測地線となるための必要十分条件が $\det(\dot\gamma,\ddot\gamma,\nu)=0$ となるのはなぜですか．十分条件であるのはわかりましたが，必要条件であることがわかりませんでした．　**お答え：** $[\ddot\gamma]^{\mathrm{T}}$ が $\dot\gamma$ と 1 次従属 $\Leftrightarrow$ $[\ddot\gamma]^{\mathrm{T}}=a\dot\gamma$ となる関数 a が存在 $\Leftrightarrow$ $\ddot\gamma=a\dot\gamma+b\nu$ となる関数 a, b が存在 $\Leftrightarrow$ $\dot\gamma$, $\ddot\gamma$, ν は 1 次従属．最後の同値性は $\dot\gamma$, ν が 1 次独立であることによる．

質問 2： （測地線の方程式の導出・略）．γ が準測地線であることの必要十分条件は

$$(u''+\Gamma^1_{11}u'^2+2\Gamma^1_{12}u'v'+\Gamma^1_{22}v'^2)v'-(v''+\Gamma^2_{11}u'^2+2\Gamma^2_{12}u'v'+\Gamma^2_{22}v'^2)u'=0$$

と言えると思うのですが，この言い換えは証明や計算などで有用でしょうか．($\det(\dot\gamma,\ddot\gamma,\nu)=0$ の方がシンプルな気がするが)．

お答え： この形で計算したことはないですが，“det” を用いた式とちがって内的でない量を使っていないのが特徴です．

質問 3： 曲面上の曲線 $\gamma(t)=p(u(t),v(t))$ が測地線ならば $|\dot\gamma(t)|=\mathrm{const}$，準測地線ならばパラメータを弧長にすることで測地線になる，を示したことで「準測地線はパラメータによらない」ことが従うのでしょうか．

お答え： はい．弧長パラメータの（定数だけの差を除いた）一意性によります．

質問 4： （準）測地線は曲面上でのある 2 点の最小距離である曲線という風に考えられますが，これを求める方法として変分法があると思います．変分法から考えても同様の方程式が得られるのでしょうか．　**お答え：** 2 点 P, Q を結ぶ区分的になめらかな曲線全体の集合上の汎関数として弧長をとると，その Euler-Lagrange 方程式は準測地線の条件を与えます．テキスト（104 ページ，定理 10.5）では，初期曲線のパラメータを弧長にとり，測地線の方程式を導き出しています．

質問 5： 測地線と物理学の最小作用の原理が似ていると感じたのですが，2 つの間には何か関係があるのでしょうか？

お答え： 弧長汎関数を「作用」と考えた時の停留点が測地線．

質問 6： なめらかな曲面上の与えられた 2 点を通るような測地線は常に存在しますか．/ 単連結であれば 2 点間の準測地は存在しますか？/ なめらかな曲面上の任意の 2 点を通る測地線は常に存在しますか？　**お答え：** いいえ．

質問 7： 曲面上の 2 点を結ぶ最短の曲線がなく，準測地線がある具体的な例は何でしょうか．また，テキスト p 106 (10.4) から，そのような準測地線は経路を微小だけずらしてもその長さがほとんど変わらないようなものであるということでよろしいでしょうか．

お答え： 前半：球面から 1 本子午線を抜く．後半：はい．弧長汎関数の停留点なので．

質問 8： 境界のない曲面では 2 点を結ぶ曲線で長さが最小のものが存在するのでしょうか？ **お答え：**「境界のない」曲面の定義はどうしましょう．平面上の開円板は境界なしと思えるでしょうか．“端がない” に相当する概念として，曲面の「完備性」があります．曲面上の 2 点 P, Q を結ぶ曲面上の曲線の弧長の下限を $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ と書くと，これは曲面上の距離関数を与える．d が曲面上の完備な距離を与えるとき，曲面上の任意の 2 点を結ぶ最短測地線が存在する（Hopf-Rinow の定理）．

質問 9： 任意の曲面について，u 曲線 $p(t,v_0)=\gamma_{v_0}(t)$ のパラメータを適切に取り替えると測地線になるようなパラメータ表示 $p(u,v)$ は存在しますか？ **お答え：**はい．

質問 10： 曲面 $p(u,v)$ の測地線というのは，u-v 平面上の直線を写像したものということでしょうか． **お答え：**いいえ．問題 6-2 参照．

質問 11： ガウス曲率が内的な量，すなわち長さによって定まるということは，ガウス曲率は等長変換で不変か？ 別に同じガウス曲率をもつ曲面は等長変換でうつりあうか，同じ第一基本量だとどうか？ **お答え：**「等長変換」を $\mathbb{R}^3$ の等長変換と思うと，すべていいえ（問題 6-1 参照）．2 次元リーマン多様体の，リーマン計量を保つ変換であれば，はい，？，はい．？ の部分，ガウス曲率が定数なら正しい．ガウス曲率が定数でないときは「どの点同士で比較するか」が自明でない．

質問 12： 曲面の第一基本形式が $ds^2=du^2+dv^2$ を満たしていたら，曲面から平面への等長変換が存在すると思いますが，この変換で曲面上の測地線は平面上の線分に写りますよね？ **お答え：**「等長変換」が第一基本形式を保つ写像という意味ならそのとおり．

質問 13： 平均曲率は内的な量ではなく，ガウス曲率は内的な量であるということは，同じ曲率という名前でも性質が大きく異なるということでよいですか． **お答え：**よい．

質問 14： ガウス曲率 K が 0 である曲面は平面や円柱以外にありますか？ **お答え：**問題 3-2，問題 4-3．テキスト付録 B-4．

質問 15： 球面に切れ込みを入れて展開図を作ろうとしても，ガウスの驚異の定理からそれは不可能というのは正しいですか．

お答え：「展開図をつくる」というのが平面上に広げることだとすると，正しいです．

質問 16： 球面のガウス曲率が正の定数であるため，正確な地図は存在しないようですが，円柱面のようなガウス曲率が恒等的にゼロである曲面に対しては正確な地図をつくることは可能ですか． **お答え：**円柱面は切って広げればよい．一般にはテキスト付録 B-4．

質問 17： ガウスの驚異の定理という名前に驚異という言葉あるのは，ガウス曲率 K を第一基本量を用いて表したときにとても複雑な式になるからですか．それとも内的な量だけでわかるからですか． **お答え：**後者．

質問 18： 授業で紹介された「擬球面」ですが，どこらへんが球面と似ているのでしょうか．テスト p 257 の図 B-7.1 にある図からは似ているように見えなかったので… **お答え：**ガウス曲率が一定というところ．球面上の三角法の公式と擬球面上の公式も似ています．「完備」なガウス曲率 -1 の曲面は $\mathbb{R}^3$ 内に実現できない (Hilbert) ですが，$\mathbb{R}^3$ に「内積」$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=(x_1)^2+(x_2)^2-(x_3)^2$ を与えた空間（Lorentz-Minkowski 空間）の「球面」$\{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=-1\}$ で実現でき，擬球面はその一部になっています．

質問 19： 準測地線で囲まれた領域として多角形の概念を拡張できないだろうか？ また，その時『三角形』の面積の求め方はどうなるのか（通常より計算量が減るか）？ **お答え：**今回「測地三角形のガウス・ボンネの定理」として少し扱います．

質問 20： $\mathbb{R}^n$ の $n-1$ 次元部分多様体で，第一基本量，第二基本量が定まることから「ガウス曲率」なるものを $n=3$ のときと同様に定義されると思います．これも内的な量となりますか？ **お答え：**同様とは $\widehat{I}^{-1}\,\widehat{II}$ の行列式？ これには「ガウス・クロネッカー曲率」という名前がついていて，次元 n が奇数（超曲面の次元が偶数）のときには内的であることが知られています：J. A. Thorpe “Elementary Topics in Differential Geometry”, 1979, Springer-Verlag; Theorem 2 in Page 227. 邦訳は丸善．

質問 21： 曲面論の基本定理は単連結領域であることが前提となっていますが，単連結でない領域において適合条件をみたす Ω,Λ に対して正則曲面が定義できない場合があるのでしょうか． **お答え：**はい．領域上で一価な写像として定義されないケースがある．

質問 22： 5-1 によると，可積分条件の 3 つの独立な方程式は上三角成分か下三角成分をみればよかったです．これは一般の可積分条件でも上三角成分か下三角成分さえみればいいのでしょうか． **お答え：**曲面の場合はそう．これには「内積」が絡んでいます．

質問 23： 可積分条件が 3 本の独立した式に分解できることは，前回の課題 5-1 のように，一般の場合について具体的に可積分条件の等式の左辺を展開することで得られるのでしょうか？ あるいは任意の曲面は第一基本量が 5-1 のような形になるようなパラメータを持つとおっしゃっていたので，それを踏まえて 5-1 を解いたことで，その可積分条件が 3 本の独立な式うであｒわせたことになることを示したことになるのでしょうか． **お答え：**前者．後者でも示したことにはなるが，可積分条件が何らかの意味でパラメータに依存しないことを示す必要がある．等温座標系の存在は 2 次元の場合しか保証されないので，後者は高次元化できない．

質問 24： 問題 5-1 のように独立な等式が 3 本となるような曲面や第一基本形式，第二基本形式の条件はあるのでしょうか．

お答え： ない．

質問 25： 教科書 p179，定理 16.2（曲面論の基本定理）において，「$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ が D 上のリーマン計量を与えている」とありますが，リーマン計量とはどういう意味ですか． **お答え：**ここでは $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ が正値行列となること．

質問 26： x^i でパラメータ表示された写像 $\mathbb{R}^2\supset U\ni(x^1,x^2)\mapsto p(x_1,x_2)\in ?$ で，もし $\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}p\neq\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}p$ ならば $\nabla_{\partial_j}(\frac{\partial p}{\partial x^i})=\Gamma^k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x^k}$ or $\nabla_{\partial_j}(\frac{\partial p}{\partial x^i})=\Gamma^k_{ji}\frac{\partial p}{\partial x^k}$ のどちらを書くべきですか？ **お答え：**危ない場合は適当にきめて「定義」を書いておくべき．

質問 27： 世界の地図は共変微分を使って測定したものですか？ もしそうなら他のパラメータを使ってそして共変微分を使って同じ地図が作られますか？ **お答え：**質問の意味がわかりません．地図の作り方の例はテキスト付録 B-3 にある．

質問 28： 事実 6.8 は $\mathbb{R}^3$ における 2 次元曲面に一次元材料を貼ったときのある種の平衡条件に相当すると思いました．たとえば「ゴム」のように「曲げ」に対する抵抗が小さく，「伸び率」のみが力の釣り合いに関わり，準測地線で平衡状態になりそうですし，「針金」だと「曲げ」に対する抵抗が大きく，弾性エネルギーに寄与すると思われます．この「弾性エネルギー」を最小化する問題の特殊な場合として事実 6.8 は見れるのでしょうか． **お答え：**弾性エネルギには曲線の曲率が絡んでくるはずで，事実 6.8 との関係はどうなんでしょうね．曲面の束縛される「棒」の問題としてうまく定式化できるでしょうか．

7 ガウス・ボンネの定理

ここでは断りのない限り $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級正則曲面，ν を p の単位法ベクトル場，$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ を第一基本形式，$I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ を第二基本形式とする．

■準測地線と測地線（復習） 曲面上の点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ に接する方向 $p_u(u_0, v_0)$, $p_v(u_0, v_0)$ が生成するベクトル空間（接ベクトル空間）を $dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ と書く（講義資料 2, 3 ページ参照）と，$\mathbb{R}\nu(u_0, v_0)$ は接ベクトル空間の直交補空間だから，各 (u_0, v_0) ごとに直交直和分解 $\mathbb{R}^3 = dp(T_{(u_0,v_0)}U) \oplus \mathbb{R}\nu(u_0, v_0)$ が成立する．この直和分解にしたがって，ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}$ と分解するとき，右辺第一項を $\boldsymbol{v}$ の（P における）**接成分**, 第二項を **法成分**という．とくに $[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} = (\boldsymbol{v} \cdot \nu(u_0, v_0))\nu(u_0, v_0)$ である．

曲面上の正則曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ の速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ は曲面に接するが，加速度ベクトル $\ddot\gamma(t)$ は一般にそうでない．そこで，各 t において $\gamma(t)$ における直交分解 $\ddot\gamma(t) = [\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}} + [\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{N}}$ を考える[*1]．

定義 7.1. 曲面上の正則曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$（パラメータは弧長とは限らない）が**準測地線**であるとは，各 t で $[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}}$ が $\dot\gamma(t)$ と一次従属となることである．また γ が **測地線**であるとは，各 t で $[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ を満たすことである．

命題 7.2. 曲面上の曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ が,

- 測地線ならば，$|\dot\gamma(t)|$ は t によらず一定である．
- 準測地線ならば，パラメータを弧長に取り替えれば測地線である．

このことから測地線の概念は曲線のパラメータのとり方に依存するが，準測地線は曲線のパラメータによらないことが分かる．曲線 γ が準測地線となるための必要十分条件は $\det(\dot\gamma, \ddot\gamma, \nu) = 0$ となることである．これを $(u(t), v(t))$ の式で表すと $\ddot u$, $\ddot v$ について解くことが一般にできないので微分方程式とはならないが，測地線は次のように微分方程式で特徴づけられる．

命題 7.3 (測地線の方程式)**.** 曲面上の曲線 $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ が測地線であるための必要十分条件は

$$\ddot u + \dot u^2\Gamma^1_{11} + 2\dot u\dot v\Gamma^1_{12} + \dot v^2\Gamma^1_{22} = 0, \qquad \ddot v + \dot u^2\Gamma^2_{11} + 2\dot u\dot v\Gamma^2_{12} + \dot v^2\Gamma^2_{22} = 0$$

を満たすことである．

例 7.4.
- 曲面上にのっている直線が存在するならばこれは準測地線である．
- 球面の大円（中心を通る平面と球面の共通部分）は準測地線である．

事実 7.5.
- 曲面上の 2 点を結ぶ曲線のうち，長さ最小のものが存在するならばそれは準測地線である．
- 曲面上の点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ に対し，$\gamma(0) = \mathrm{P}$，$\dot\gamma(0) = \boldsymbol{v} \in dp(T_{(u_0,v_0)}U)$ となる測地線 γ が十分小さい t の範囲でただ一つ存在する．

2022 年 2 月 3 日

[*1] もしも t が γ の弧長パラメータなら $[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{N}} = \kappa_n(t)\nu(u(t), v(t))$ である．ただし κ_n は γ の法曲率．さらにこのとき，$[\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\kappa}_t(t)$ を**測地的曲率ベクトル**とよぶ．これは $\dot\gamma(t)$，$\nu(u(t), v(t))$ に直交するベクトルである．

■三角形のガウス・ボンネの定理　正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して U 上の曲線 $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ が $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \mathrm{B}$, $\gamma_2(1) = \gamma_3(0) = \mathrm{C}$, $\gamma_3(1) = \gamma_1(0) = \mathrm{A}$ を満たし，これらをつなげて得られるループの内部が閉円板と同相な閉領域 $\Delta\mathrm{ABC}$ であるとする．A, B, C で出会う曲線分が成す角をそれぞれ $\angle\mathrm{A}$, $\angle\mathrm{B}$, $\angle\mathrm{C}$ と書くと，

定理 7.6 (ガウス・ボンネの定理，テキスト 定理 10.6)**.** 線分 $\hat{\gamma}_j = p \circ \gamma_j$ $(j = 1, 2, 3)$ が測地線であるとき，

$$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = \pi + \int_{\Delta\mathrm{ABC}} K\,dA \qquad (dA = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv).$$

■2 次元多様体と曲面

定義 7.7. 2 次元（可微分）多様体 とは，第二可算公理を満たすハウスドルフ空間 S と，S の開集合族 $\{U_\alpha\,;\,\alpha \in A\}$, 各 U_α から $\mathbb{R}^2$ への連続な単射 $\{\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^2\,;\,\alpha \in A\}$ の組で次を満たすものである：(1) $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = S$, (2) φ_α は U_α から $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^2$ への同相写像 (3) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ なら $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ は微分同相写像.

「大域的な（正則）曲面」とは，2 次元可微分多様体 $S = (S; \{U_\alpha, \varphi_\alpha\})$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $p\colon S \to \mathbb{R}^3$ で，各 α に対して $p \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}^3$ が正則曲面を与えているものとする．

今回まで扱った正則曲面のさまざまな不変量はパラメータのとり方によらないので，大域的な曲面の不変量とみなすことができる．

定義 7.8. 2 次元可微分多様体 $(S, \{U_\alpha, \varphi_\alpha\})$ が**向き付けられた**多様体である，とは各 U_α, U_β に対して，$\mathbb{R}^2$ の開集合間の微分同相写像 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ の Jacobi 行列式が常に正となるものである．

定理 7.9 (大域的なガウス・ボンネの定理（テキスト，定理 10.7）)**.** コンパクトで向き付けられた 2 次元多様体 S 上で定義された大域的な正則曲面 $p\colon S \to \mathbb{R}^3$ に対して

$$\int_M K\,dA = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2 - 2g)$$

が成り立つ．ただし K, dA はそれぞれ曲面のガウス曲率，面積要素，$\chi(S)$ は S のオイラー数，g は閉曲面 S の種数である（テキスト §10 参照)．

■リーマン多様体　定理 7.9 は，Gauss 曲率，dA と S の位相不変量の関係式なので，曲面の第二基本形式を用いずに記述することができる．多様体 S に形式 $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ が（座標変換により適切な成分の変換則を満たすように）付随しており，さらに $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$ を満たしているとき，組 (S, ds^2) を 2 次元リーマン多様体，ds^2 をリーマン計量という．ガウス曲率は内的であるから，2 次元リーマン多様体上の量とみなすことができる．

例 7.10. $S = \{(u, v)\,;\,v > 0\}$ 上で $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$ と定めると，(S, ds^2) は 2 次元リーマン多様体である．問題 5-1 の公式を用いれば，このリーマン多様体のガウス曲率は -1 であることがわかる．しかし，正則曲面 $p\colon S \to \mathbb{R}^3$ で第一基本形式がこの ds^2 となるようなものは存在しない（D. Hilbert, 1901)．