幾何学概論第一 (MTH.B211)

ユークリッド空間の曲線

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/10/06

合同変換

何と何を同じとみなす?

・不変な量

・

目標

定理 (命題 1.3) 合同変換

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換は

$n \times n$

$$\varphi : \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathrm{O}(n), \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される．

例

直交行列

orthogonal matrices

ユークリッド空間

定義

1. ユークリッド空間：$\mathbb{R}^n$ に標準的な内積 "$\cdot$" を与えたもの.
2. 大きさ：$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$.
3. 角度：$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して
$$\angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \cos^{-1} \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{w}|}.$$
4. 2 点 P, Q $\in \mathbb{R}^n$ に対して $\boxed{d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|.}$

注：

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$.
- $(\mathbb{R}^n, d)$ は距離空間.

t: 転置

$$(v_1 \cdots v_n)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

直交行列

定義

実数を成分とする n 次正方行列が直交行列であるとは

$$ {}^t\!AA = A{}^t\!A = I \qquad (I \text{ は } n \text{ 次単位行列}) $$

- 直交行列 $\Leftrightarrow$ 内積を保つ線形変換：$(A\boldsymbol{v}) \cdot (A\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$
- 直交行列 $\Leftrightarrow$ 大きさを保つ線形変換：$|A\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|$
- $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が直交行列 $\Leftrightarrow$ $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交系

A　列ベクトル

$a_i \cdot a_j = \delta_{ij}$

直交群

命題

直交行列の行列式は 1 または -1 である．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{O}(n) &:= \{n \text{ 次直交行列}\} && \text{直交群}\\
\mathrm{SO}(n) &:= \{A \in \mathrm{O}(n)\,;\, \det A = 1\} && \text{特殊直交群}
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{O}(n)$ は行列の積に関して群をなす．
  - $A, B \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow AB \in \mathrm{O}(n)$（結合則 $(AB)C = A(BC)$）．
  - $I \in \mathrm{O}(n)$
  - $A \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$.
- $\mathrm{SO}(n)$ は行列の積に関して群をなす（$\mathrm{O}(n)$ の部分群）

2次直交行列

命題

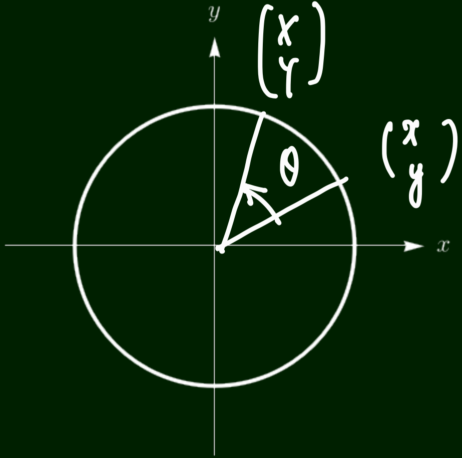
$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

回転

$\in SO(2)$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

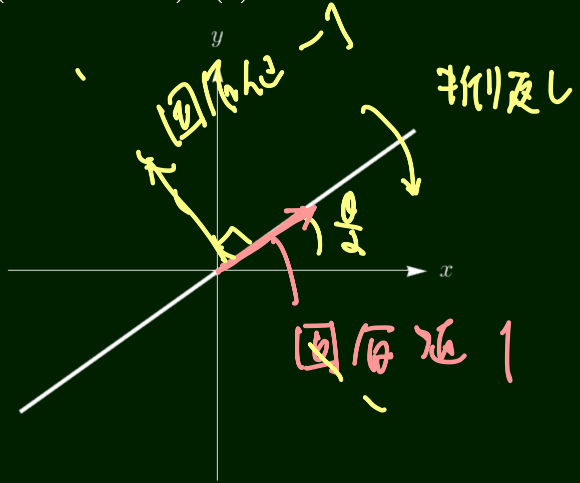


折返し

$\det = -1$

$\in O(2) \setminus SO(2)$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



3 次直交行列

問題

$A \in \mathrm{SO}(3)$ ならば，ある $P \in \mathrm{SO}(3)$ が存在して

det = 1

$$\overset{P^{-1}}{{}^tP}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: 不変

- A の固有値の一つは 1．その単位固有ベクトルを $\boldsymbol{a}_1$ とする．
- $\boldsymbol{a}_1$ に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{a}_2$ をひとつとる．
- $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$（ベクトル積）とする．
- $P = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ とおく．

等長変換

定義

合同

写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が**等長変換**であるとは

$$\underline{d\big(f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q})\big) = d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})} \qquad (\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つこと.

きょりを保つ

- $\mathbb{R}^n$ の等長変換全体は写像の合成に関して群をなす.

補題

直交行列 $A \in \mathrm{O}(n)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して写像

$$f_{A,\boldsymbol{a}}\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto f_{A,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

は等長変換.

等長変換の決定

定理

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換は

$$f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathrm{O}(n), \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される.

同じ（位相幾何）

ちがう

（微分幾何）

合同変換

$\mathbb{R}^n$ の等長変換を合同変換ということもある．等長変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ ($A \in \mathrm{O}(n)$，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$) が

- 向きを保つ合同変換 $\Leftrightarrow A \in \mathrm{SO}(n)$.　　$n=2$ 回転
- 向きを反転する合同変換 $\Leftrightarrow A \in \mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n)$.

$n=2$ 折り返し