

# 幾何学概論第一 (MTH.B211)

ユークリッド空間の曲線

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/>

東京工業大学理学院数学系

2022/10/06

# 目標

## 定理 (命題 1.3)

ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の等長変換は

$$\varphi: \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad A \in O(n), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される.

# ユークリッド空間

## 定義

1. ユークリッド空間： $\mathbb{R}^n$  に標準的な内積 “ $\cdot$ ” を与えたもの.
2. 大きさ： $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して  $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$ .
3. 角度： $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  に対して

$$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \cos^{-1} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|}$$

4. 2点  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  に対して  $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$ .

注：

- ▶  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = {}^t \mathbf{v} \mathbf{w}$ .
- ▶  $(\mathbb{R}^n, d)$  は距離空間.

# 直交行列

## 定義

実数を成分とする  $n$  次正方行列が直交行列であるとは

$${}^tAA = A^tA = I \quad (I \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

- ▶ 直交行列  $\Leftrightarrow$  内積を保つ線形変換： $(Av) \cdot (Aw) = v \cdot w$
- ▶ 直交行列  $\Leftrightarrow$  大きさを保つ線形変換： $|Av| = |v|$
- ▶  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  が直交行列  $\Leftrightarrow \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$  が  $\mathbb{R}^n$  の正規直交系

# 直交群

## 命題

直交行列の行列式は 1 または  $-1$  である.

$$O(n) := \{n \text{ 次直交行列}\}$$

直交群

$$SO(n) := \{A \in O(n); \det A = 1\}$$

特殊直交群

- ▶  $O(n)$  は行列の積に関して群をなす.
  - ▶  $A, B \in O(n) \Rightarrow AB \in O(n)$  (結合則  $(AB)C = A(BC)$ ).
  - ▶  $I \in O(n)$
  - ▶  $A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$ .
- ▶  $SO(n)$  は行列の積に関して群をなす ( $O(n)$  の部分群)

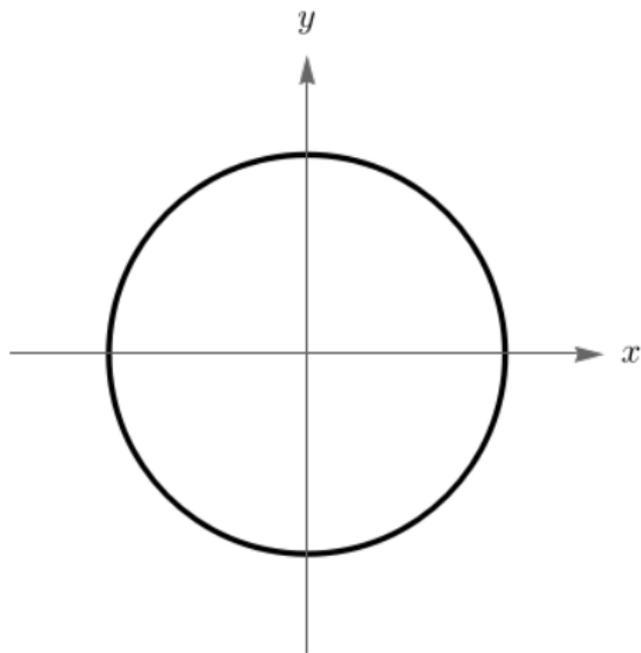
## 2次直交行列

### 命題

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathrm{O}(2) &= \mathrm{SO}(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

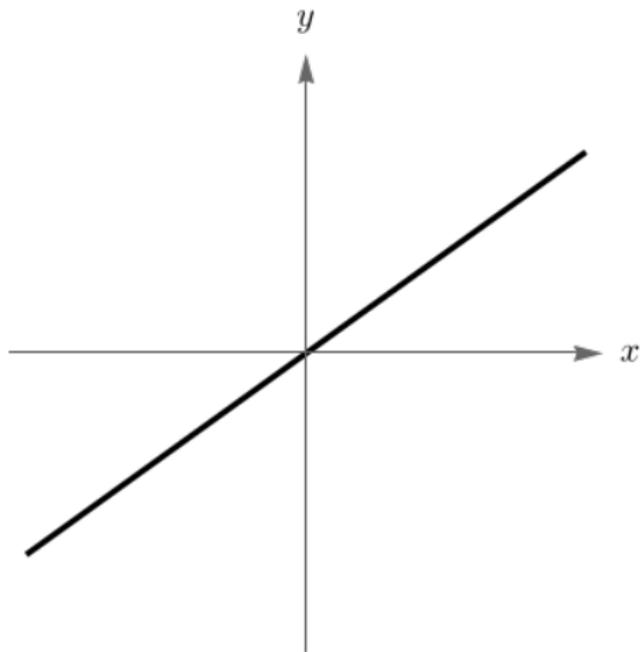
# 回転

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



## 折返し

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



## 3次直交行列

### 問題

$A \in \text{SO}(3)$  ならば, ある  $P \in \text{SO}(3)$  が存在して

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- ▶  $A$  の固有値の一つは 1. その単位固有ベクトルを  $\mathbf{a}_1$  とする.
- ▶  $\mathbf{a}_1$  に直交する単位ベクトル  $\mathbf{a}_2$  をひとつとる.
- ▶  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$  (ベクトル積) とする.
- ▶  $P = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  とおく.

# 等長変換

## 定義

写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  が等長変換であるとは

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) \quad (P, Q \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つこと.

- ▶  $\mathbb{R}^n$  の等長変換全体は写像の合成に関して群をなす.

## 補題

直交行列  $A \in O(n)$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  に対して写像

$$f_{A, \mathbf{a}}: \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto f_{A, \mathbf{a}}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

は等長変換.

# 等長変換の決定

## 定理

ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の等長変換は

$$f: \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad A \in O(n), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

の形に表される.

# 合同変換

$\mathbb{R}^n$  の等長変換を合同変換ということもある. 等長変換  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{a}$  ( $A \in O(n)$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ) が

- ▶ 向きを保つ合同変換  $\Leftrightarrow A \in SO(n)$ .
- ▶ 向きを反転する合同変換  $\Leftrightarrow A \in O(n) \setminus SO(n)$ .