2022 年 10 月 6 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 1

講義概要

■重要なポインタ

- http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/ (この授業の公式ページ)
- http://www.official.kotaroy.com/class/2022/geom-1/ (この授業のページ; ミラーサイト)
- http://t2schola.titech.ac.jp (T2SCHOLA; 講義資料，課題の提出，返却はこちら)

■科目名など　幾何学概論第一 (MTH.B211; 理学院数学系対象)
木曜日・3/4 時限; 10:45–12:25; 本館 H114 講義室

■担当者　山田光太郎 (kotaro@math.titech.ac.jp)

■講義の概要　線形代数学，微分積分学から必要な事項を整理したのち，以下の事項を学ぶ：平面曲線のパラメータ表示・弧長・曲率・曲率の幾何学的意味・フルネの公式・平面曲線の基本定理・空間曲線の曲率と捩率・空間曲線の基本定理．平面・空間曲線の微分幾何学の基本事項を通して，これまでに学んだ線形代数学・微分積分学が使われる場面を体験し，変換・不変量といった現代幾何学の基本的な概念を知る．

■到達目標　平面曲線, 空間曲線の微分幾何学の基本的な事項を学ぶ．(1) 曲線の曲率や捩率を合同変換やパラメータ変換で不変な量としてとらえ，それが曲線を決定すること（曲線論の基本定理）を理解する．(2) 閉曲線の位相幾何学的な性質と曲率の関係を通して，局所的な概念と大域的な概念の違いを知る．(3) これらの理論を具体例の計算によって確認する．本講義の続編として「幾何学概論第二」が第 4 クォーターに開講される．

■教科書　**梅原雅顕・山田光太郎『曲線と曲面』(改訂版)（裳華房）**
正誤表：http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publication/surface-jp.html

■授業の進め方

- 全学の方針により対面にて講義を行う．ただし，対面講義への出席を評価の対象にはしない．
- 講義前日までに T2SCHOLA に講義資料および映写資料をおく．事前に閲覧できるようにしておくこと．なお**紙媒体による資料配布は行わない**．
- 復習のため講義の録画を行う．録画は zoom を用いるが，対面授業の原則に従い，url は公開しない．
- 板書および zoom 上の録画 url は原則として授業の翌日中には公開する．なお，録画が失敗する可能性もあるが，その際の代替処置の用意はない．
- 日程の変更などは T2SCHOLA よりアナウンスする．
- **台風・積雪**などにより，通学が困難になる可能性がある場合は**全学の決定に先立って**授業変更（オンラインに変更・または休講）を通知することがある．

■成績評価の方法

- 第 1 回から第 6 回までの授業で提示された**課題**を 1 回あたり 5 点満点で評価する．
- 定期試験期間中に**試験**（100 点満点）を行う予定．詳細は試験実施の 2 週間前の講義の際に指示する．試験を受験することは単位を得るための**必要条件**である (十分条件ではない)．
- 成績は**試験**と**課題**の得点から決定する．決定の方式は次の通り：課題の得点の合計を x 点 ($0 \leqq x \leqq 30$)，課題得点のクラス最大値を $x_{\max}$ 点，試験の得点を y 点（$0 \leqq y \leqq 100$）としたとき，

$$Z := 5 \times \left[\frac{z}{5}\right], \qquad z := (1-p)\left(\frac{100x}{x_{\max}}\right) + py, \qquad p := 0.3 + 0.7a$$

  で与えられる Z と 100 のうち大きくない方を評価点とする（予定；**変更の場合は定期試験予告以前に通知する**）．ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数，係数 $a \in [0,1]$ は**試験答案提出時に受講者自身が決める定数**である．

■課題とその評価方法

1 講義の際に提示する問題のうちから 1 問を選んで回答する．**２点満点**

2 講義内容，講義資料の**誤りの指摘**または**質問３点満点**．

- 評価基準：基本点**２点**；計算・議論を自分で追わないと見つけられないような誤りの指摘・質問は**３点**；同一の指摘が 5 件以上あるものは**１点減点**；講義内容と無関係，高校生程度の誤認，講義中に指摘した内容，文として成立しないものは**０点**．
- 複数の質問・誤りの指摘はそのうち**最高点**のものを評価点とする．

■提出方法

- 所定の用紙（A4 版 2 枚）—提出用紙—に記入して PDF 形式で T2SCHOLA に提出．
- 講義 web ページ，T2SCHOLA に提出用紙の PDF 形式ファイルおよび LuaLaTeX ソース をおく．
- 採点の都合上，提出用紙のフォーマットの変更は不可．とくに，ファイルは **2 ページ**ちょうど，サイズは **A4**．PDF 文書の「プロパティ」でサイズが 210×297mm となっていれば問題ない．
- 電子ファイルでの提出は，見た目のフォーマットが同一であれば可．
- 提出期限は講義直後の**月曜日の 07 時 00 分（JST）**．
  なお，T2SCHOLA 上の受付停止は行わなず，提出のタイムスタンプで判断する．
- 提出物は次回の講義までに返却する；質問等には個人が特定できない形で回答する．

■PDF tips:

- PDF 文書が所定のサイズでない場合があります．たとえば，辺の長さが 2m くらい．写真を PDF 化するときに起きることがあるようです．この場合は，適当に用紙サイズを設定して「PDF ファイルに印刷」すると修正できることがあります．
- オリジナルの提出用紙にタブレットなどで書き込みをして PDF 化した場合，作成環境により，ファイルを結合・分割すると書き込みが消えてしまうことがあるようです．PDF 化したファイルをもう一度 PDF リーダで読み込み，「PDF ファイルに印刷」すると修正できることがあります．

1 ユークリッド空間の曲線

1.1 ユークリッド空間

■内積 この講義では標準的な**内積** “$\cdot$” が与えられた $\mathbb{R}^n$ のことを**ユークリッド空間**という．ベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ を**列ベクトル**と見なしたとき $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} := {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$ で定まるスカラ $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ を $\mathbb{R}^n$ の**標準内積**という[*1]．ただし右辺の ${}^t\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ の**転置**を表し，右辺の積は行列の積を表す．これを用いて，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の**大きさ**を $|\boldsymbol{v}| := \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$ と定める．また，$\mathbb{R}^n$ の 2 点 P, Q の**距離**を $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) := \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ で定める．

■直交行列 実正方行列 A が**直交行列**である，とは ${}^tAA = A{}^tA = I(=$ 単位行列$)$ が成り立つことである．

命題 1.1. 次数 n の 実正方行列 A が直交行列であることと，次は同値である：

- 任意のベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(A\boldsymbol{v})\cdot(A\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$.
- 任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $|A\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}|$.
- A の n 個の列ベクトルが $\mathbb{R}^n$ の**正規直交基**をなす.

命題 1.2.
- 直交行列の行列式の値は 1 または -1 である.
- $\mathrm{O}(n)$ を n 次直交行列全体の集合，$\mathrm{SO}(n)$ を n 次直交行列で行列式が 1 であるもの全体とする．このとき，$G = \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$ のそれぞれに対して次が成り立つ[*2]：$I \in G$; $A, B \in G$ ならば $AB \in G$; $A \in G$ ならば A は正則で $A^{-1} \in G$.

■等長変換 写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が距離 d を保つとき f を**等長変換**という.

命題 1.3. 列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\mathbb{R}^n$ の点（原点を始点とする位置ベクトル）とみなすとき，次は等長変換：

$$f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \qquad (A \in \mathrm{O}(n), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n). \tag{1.1}$$

定理 1.4. $\mathbb{R}^n$ の等長変換は (1.1) の形に限る.

定義 1.5. $\mathbb{R}^n$ の等長変換を**合同変換**ということもある．とくに (1.1) の形をした合同変換のうち $A \in \mathrm{SO}(n)$ となるものを**向きを保つ合同変換**，そうでないものを **向きを反転する合同変換**という.

1.2 逆関数定理（一変数）

定理 1.6 (一変数関数の逆関数定理)**.** 区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^r-級関数 $f\colon J \to \mathbb{R}$（$r \geqq 0$）の像 $f(J)$ は $\mathbb{R}$ の区間である．さらに $r \geqq 1$ の場合[*3]の導関数 f' が J 上いたるところで 0 とならないとき，$f\colon J \to f(J) \subset \mathbb{R}$ は全単射で，逆写像 $f^{-1}\colon f(J) \to J$ も C^r-級である.

> **証明：** 前半は中間値の定理．後半の全単射性は，$f' \neq 0$ なら単調であることからしたがう．逆関数の微分可能性は，$df^{-1}(y)/dy = 1/f'(x)$ $(y = f(x))$ から逐次微分すればわかる.

2022 年 10 月 6 日

[*1] 記号 “$:=$” は左辺を右辺によって定義することを表す

[*2] このことを $\mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$ は**行列の積に関して群を成す**という．とくに $\mathrm{O}(n)$ を n 次**直交群**, $\mathrm{SO}(n)$ を n 次**特殊直交群** という.

[*3] この講義ではとくに断らない限り $r = \infty$ の場合を考える.

1.3 ユークリッド空間の曲線

区間 $J \subset \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^n$ への C^∞-級写像 $\gamma\colon J \ni t \mapsto \gamma(t) = {}^t\bigl(x_1(t), \dots, x_n(t)\bigr) \in \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の**曲線のパラメータ表示**（助変数表示，媒介変数表示），**パラメータ表示された曲線**という．

定義 1.7. 閉区間 $J = [a, b]$ 上の曲線の C^1-級パラメータ表示 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ の**弧長** $\mathcal{L}(\gamma)$ を次で定める：

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(u)|\, du \qquad \left(\dot{\gamma}(t) := \frac{d\gamma}{dt}(t)\right).$$

弧長は $\mathbb{R}^n$ **の合同変換で不変**である．

注意 1.8. 一般に，写像 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ と閉区間 $[a, b]$ の分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ に対して

$$\mathcal{L}_\Delta(\gamma) := \sum_{j=1}^{N} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

と定める．とくに γ が C^1-級ならば $\mathcal{L}(\gamma) = \sup_\Delta \mathcal{L}_\Delta(\gamma)$ が成り立つ．ただし sup は $[a, b]$ の分割全体を取る．

曲線の C^r-級パラメータ表示 $\gamma_1\colon J_1 \to \mathbb{R}^n$，$\gamma_2\colon J_2 \to \mathbb{R}^n$ が**パラメータ変換で移り合う**とは，C^r-級全単射 $\varphi\colon J_1 \to J_2$ で $\dot{\varphi} > 0$ となるものが存在し，$\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ を満たすことである．

例 1.9. 区間 $J_1 = (-\pi, \pi)$, $J_2 = (-\infty, \infty)$ で定義された曲線 $\gamma_1(s) = {}^t(\cos s, \sin s)$, $\gamma_2(t) = {}^t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ はパラメータ変換で移り合う．実際 $\varphi(s) = \tan\frac{s}{2}$ とおけばよい．

定義 1.10. 曲線の C^∞-級パラメータ表示 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ において $\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$ が成り立つとき t_0 をパラメータ表示 γ の**特異点**という．特異点をもたないパラメータ表示を曲線の**正則なパラメータ表示**，略して**正則曲線**という．とくに $|\dot{\gamma}| = 1$ のとき**弧長パラメータ表示**という．

命題 1.11. 正則曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ とパラメータ変換で移り合う，弧長パラメータ表示された曲線が存在する．

証明： 点 $t_0 \in J$ を固定し，

$$s := s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(u)|\, du\colon J \to J' := s(J) \subset \mathbb{R}$$

を考えると，$ds/dt = |\dot{\gamma}(t)| > 0$ なので，逆関数定理 1.6 より C^∞-級の逆関数 φ が存在する．$\gamma \circ \varphi\colon J' \to \mathbb{R}^n$ が求めるものとなる．

問題

1-1 写像 $\gamma\colon J := [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ を $\gamma(t) := {}^t\left(\frac{\sqrt{2}a\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sqrt{2}a\cos t\sin t}{1+\sin^2 t}\right)$ で定める．ただし a は正の定数．

(1) $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ $(t_1, t_2 \in (-\pi, \pi), t_1 < t_2)$ となる t_1, t_2 の組を求めなさい．

(2) γ の弧長を $L := \mathcal{L}(\gamma)$ とするとき，$\frac{\pi}{2} < \frac{L}{4a} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ であることを示しなさい．

1-2 写像 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ を $\gamma(t) := {}^t\bigl(\operatorname{sech} t, t - \tanh t, \tanh t, \operatorname{sech} t\bigr)$ とおく．

(1) t は γ の弧長パラメータであることを示しなさい．

(2) 射影 $\pi\colon \mathbb{R}^4 \ni {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto {}^t(x_1, x_2)$ に対して $\hat{\gamma} := \pi \circ \gamma$ とおく．区間 $(0, \infty)$ に制限したときの $\hat{\gamma}$ の弧長パラメータ表示を作りなさい．