幾何学概論第一 (MTH.B211)

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/10/13

おしらせ

- 授業日程訂正：第 3 回と第 4 回の内容を入れ換えます.
- 51 名から課題の提出がありました．受講登録者 59 名 (2022.10.11.)
- 答案および評点は T2SCHOLA よりフィードバックしております．ご確認ください．答案にかかれた文字は読解困難かもしれませんが，これは山田個人のメモです．講義資料にあるものをご利用ください.
- 1 件，課題の内容・フォーマットともに不正なものがありました．講義資料をよく読んでおいてください.

誤字・誤用ギャラリー

- 講議　義
- 成積　績
- 孤長 —— 弧
- 定議　義
- 隋円積分　楕円　だ円
- 前程　提

人による
↓
e

- C_1 級 —— C^1級
- cos　cos 立体（斜体でない） log exp
- 題意 ~ ~より ~がみたされた
- 認識 ~

意見・要望など

- 質問を強制されるのにレベルが低いと 0 点になるのは自分のような弱者には苦しいしストレスです．このような授業の履修に向いていないのでしょうか.

  山田のコメント：試験一発で評価可能ですので，向いていないとは言えないのでは？
  ちなみに「計算を強制されるのに計算を間違えると 0 点になる」というのは問題でしょうか？

意見・要望など

- 話に笑いを入れているのがとても良い.
- 数学が得意というわけではないので，気を抜いているとすぐについていけなくなりそうですが，スライドがわかりあやすいし，講議（原文ママ）中の先生のジョークも面白いし，とりあえず頑張ろうという気持ちでいっぱいっぱいです．このままのモチベーションで継続したいです.

山田のコメント：ハードル高い.

意見・要望など

- 授業で扱ったいくつかの命題の証明が教科書に書いていない（見つけられていないだけかもです）と思うので証明が書かれている pdf の配布や証明の書いてある教科書をスライドに載せてくれると嬉しいです．

  山田のコメント：具体的にはどの命題？

質問から

区分的 C^1

Q: $\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\dot\gamma(u)|\,du$ で曲線の長さを定義したとき，$\mathcal{L}(\gamma) = \sup\sum(\text{分割})$ が成り立つとありますが，逆に $\mathcal{L}(\gamma) = \sup\sum(\text{分割})$ を曲線の長さの定義としても問題ないのでしょうか．（sup が存在するときに，それは $\int_a^b |\dot\gamma(u)|\,du$ に一致するか）．

A: 区分的 C^1 級ならば一致する．sup が存在しても区分的に C^1 であるとは限らない．したがって，折れ線の長さの sup で定義する方が弧長定義される対象は広い．

が

質問から

ことなる

像は一致

Q: $\gamma_1(t) = {}^t(\cos t, \sin t)$ $(0 \leqq t \leqq \underline{4\pi})$ で定義された曲線を C とすると，C は単位円と同じ曲線と言えるのでしょうか．見かけ上は同じ曲線に見えますが，単位円は $\gamma_2(t) = {}^t(\cos t, \sin t)$ $(0 \leqq t \leqq \underline{2\pi})$ とパラメータ表示できるので，単位円の弧長は 2π，C の弧長は 4π となり違うような気がします．

A: ここでは異なる曲線とみなすことにします．

質問から

$t=0$ 特異点

Q: 曲線の特異点はとがっているようなものですか.

A: いいえ.

$\gamma(t) = {}^t(t^3, 0)$　x軸

Q: ユークリッド空間において標準的な内積に限定しなくてはならない理由がわかりません.

A: 正規直交基が存在するから

(t^3, t^4)

$y = \sqrt[3]{x^4}$

C^1-CB

質問から

Q: 折返しについて，（行列の積を用いた解釈）は理解できたのですが，固有値を用いた説明がわかりません．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \det A = -1 \\ \operatorname{tr} A = 0 \\ \text{対称} \end{cases}$$

固有値 $1, \ -1$

固有ベクトルは直交する

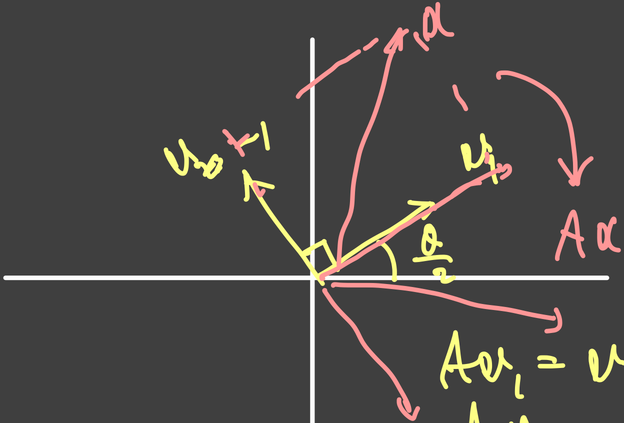
1-固有ベクトル

$$A - I = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -\sin^2\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & -\cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

(−1) ---.

$$v_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$v_{-1} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$



$Av_1 = v_1$

$Av_{-1} = -v_{-1}$

$x = \alpha v_1 + \beta \cancel{v_2}\, v_{-1}$

$Ax = \alpha v_1 - \beta v_{-1}$

質問から

Q: 群というものについて質問です．群について調べたところ集合 G とその集合上の二項計算 f の組が 3 つの条件を満たす組を群というとありました．3 つの条件とは（略）．授業で出てきた $\mathbb{R}^n$ の等長変換全体は写像の合成に関して群をなすとありますが，どのような集合にたいしてどのような二項演算が存在して 3 つの条件を満たすことは示せるのでしょうか.

A: 集合は $\mathbb{R}^n$ の等長変換全体，演算は写像の合成.

Q: 黒板 B のスライド 5 枚目や 9 枚目にある「群をなす」というのはどういう意味なのかはっきり分かっていないので説明してほしい.

A: 代数学概論第二.

講義

この後，短い休憩をとり，2 つの「講義」を行います．

1 前回の復習

2 平面曲線の基本定理