幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の基本定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/10/13

Quiz

- 平面上の異なる 2 点からの距離の積が一定である点の軌跡.

b^2

和　楕円

$b \fallingdotseq 0$

差　双曲線

$b \gg 1$　商(比)　円

~円

$(a, 0)$　$(-a, 0)$　$a > 0$

$$\{(x-a)^2+y^2\}\{(x+a)^2+y^2\}=b^4$$

陰関数表示

Cassinian Oval

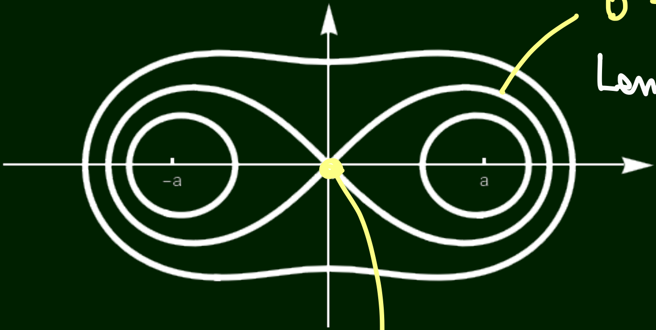
カッシニの楕線

卵形線

$$((x-a)^2+y^2)((x+a)^2+y^2)=b^4$$

$b=a$

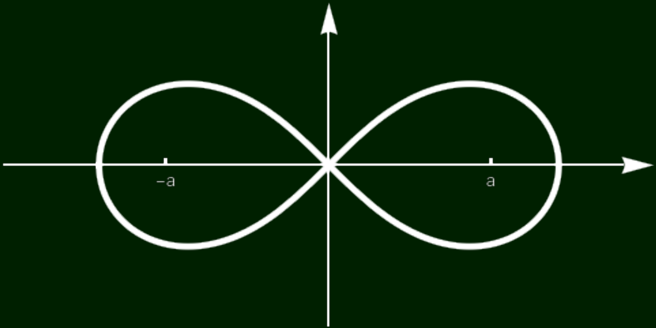
Lemniscate



自己交叉

Lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$$

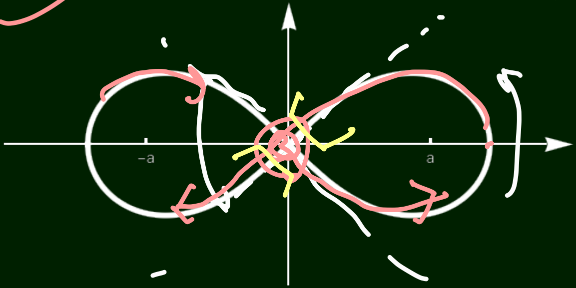


Lemniscate

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0 \qquad (*)$$

$\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

- $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$: $(*) \Leftrightarrow \boxed{r^2=2a^2\cos 2\theta}$
- $\tan\theta=\sin t$: $(*) \Leftrightarrow (x,y)=\dfrac{\sqrt{2}a\cos t}{1+\sin^2 t}(1,\sin t)$



問題 1-1

問題

正の定数 a に対して

x y 2π-periodic

t

$$\gamma(t) := \left(\frac{\sqrt{2}a\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sqrt{2}a\cos t\sin t}{1+\sin^2 t}\right) \qquad (t \in J := [-\pi, \pi]).$$

(パラメータ表示上 異なる点) 自己交叉

1. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ $(t_1, t_2 \in (-\pi, \pi), t_1 < t_2)$ となる t_1, t_2 の組.
2. $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\mathcal{L}(\gamma)}{4a} < \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

$t_1 = -\frac{\pi}{2}$

$t_2 = \frac{\pi}{2}$

$x \neq 0 \rightarrow \frac{y}{x}(t_1) = \frac{y}{x}(t_2)$

$\sim \tan t_1$ $\sim \tan t_2$

$$|\dot{r}| = \frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}} \leq 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2-\cos^2 t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = K(k)$$

第一種完全楕円
積分

$\sqrt{3次式}$

$\sqrt{4次式}$ 初等関数でない

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-k^2u^2)(1-u^2)}}$$

問題 1-2

$\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

$\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

問題

写像 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ を

$$\gamma(t) := {}^t(\operatorname{sech} t,\ t - \tanh t,\ \tanh t,\ \operatorname{sech} t) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$$

正則 in $\mathbb{R}^4$

とおく.

γ の Legendrean lift ~~m~~

1. t は γ の弧長パラメータである.
2. $\hat{\gamma}(t) := \pi \circ \gamma(t)$ $(0 < t < +\infty)$ の弧長パラメータ表示. ただし

$$\pi\colon \mathbb{R}^4 \ni {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$\sigma(t) = (\operatorname{sech} t, \tanh t)$ $\quad$ $\operatorname{sech}^2 t + \tanh^2 t = 1$

円のパラメータ表示 $\quad$ $x > 0$

Mercator 図法

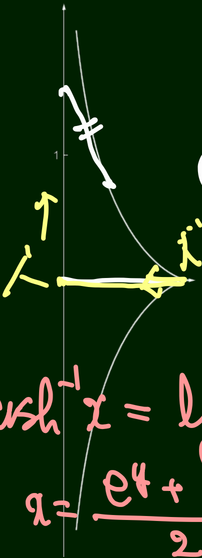
$\hat{\gamma}(t) = (\operatorname{sech} t, \; t - \tanh t)$ $\quad$ $t = 0$

$\frac{d}{dt}\hat{\gamma}(t) = \tanh t \underbrace{(-\operatorname{sech} t, \tanh t)}_{\parallel}$ 特異点

$e(t)$ 単位接ベクトル

$n(t) = (\overset{(-)}{\tanh} t \;\; \operatorname{sech} t)$ $\quad$ 法

追跡線 tractrix



y軸に下した接線の長さ $= 1$

e^{-s} $\quad \sqrt{1-e^{-2s}}$ $\quad \sqrt{1-\operatorname{sech}^2 s}$

$t>0$ $\quad \hat{\gamma} = (\operatorname{sech} t \quad t - \tanh t)$

$|\dot{\hat{\gamma}}| = \tanh t$

(弧長) $s = \int \tanh t \, dt$

$= \log \cosh t$

$\cosh t = e^{s}$

$t = \log\left(e^{s} + \sqrt{e^{2s} - 1}\right)$

$\cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$x = \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}$

特異点

定義 (定義 1.10)

曲線の C^∞-級パラメータ表示 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ において $\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{0}$ が成り立つとき t_0 をパラメータ表示 γ の<u>特異点</u>という．特異点をもたないパラメータ表示を曲線の<u>正則なパラメータ表示</u>，略して<u>正則曲線</u>という．とくに $|\dot{\gamma}| = 1$ のとき<u>弧長パラメータ表示</u>という．

弧長パラメータ

曲線のパラメータ表示 $\gamma\colon J \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n$ が
弧長パラメータ表示であるとは，$|\gamma'(s)| = 1$ が各 $s \in J$ に対して
成り立つことである．このとき s を弧長パラメータという．

命題

正則曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ に対して，これとパラメータ変換で移り合う弧長によりパラメータ表示された曲線 $\tilde{\gamma}\colon J' \to \mathbb{R}^n$ が存在する．

弧長パラメータ

命題

弧長パラメータは定数の差を除いて一意的である.

$s \longmapsto s + a$