幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の基本定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

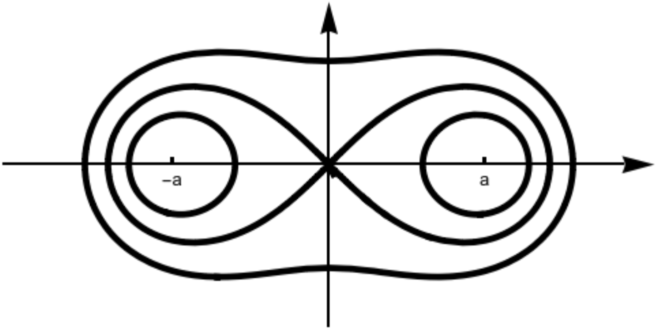
2022/10/13

Quiz

- 平面上の異なる 2 点からの距離の積が一定である点の軌跡.

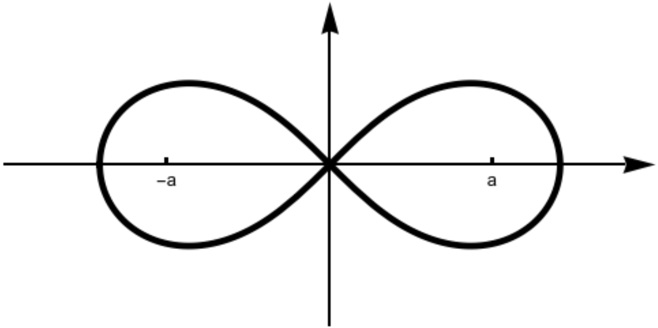
Cassinian Oval

$$\big((x-a)^2+y^2\big)\big((x+a)^2+y^2\big)=b^4$$



Lemniscate

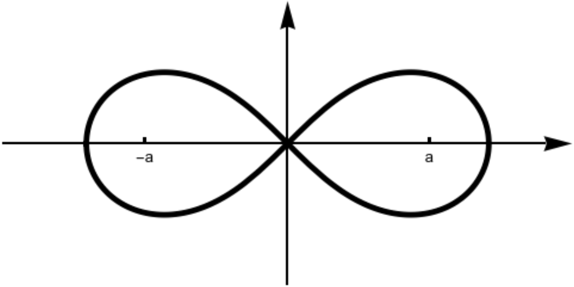
$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$$



Lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0 \tag{$*$}$$

- $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$: $(*) \Leftrightarrow r^2 = 2a^2\cos 2\theta$
- $\tan\theta = \sin t$: $(*) \Leftrightarrow (x, y) = \dfrac{\sqrt{2}a\cos t}{1+\sin^2 t}(1, \sin t)$



問題 1-1

問題

正の定数 a に対して

$$\gamma(t) := {}^t\left(\frac{\sqrt{2}a\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sqrt{2}a\cos t\sin t}{1+\sin^2 t}\right) \qquad \big(t \in J := [-\pi, \pi]\big).$$

1. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ $(t_1, t_2 \in (-\pi, \pi), t_1 < t_2)$ となる t_1, t_2 の組.
2. $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\mathcal{L}(\gamma)}{4a} < \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

問題 1-2

問題

写像 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ を

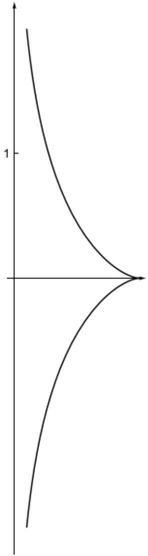
$$\gamma(t) := {}^t\bigl(\operatorname{sech} t, t - \tanh t, \tanh t, \operatorname{sech} t\bigr)$$

とおく.

1. t は γ の弧長パラメータである.
2. $\hat{\gamma}(t) := \pi \circ \gamma(t)$ $(0 < t < +\infty)$ の弧長パラメータ表示.
   ただし

$$\pi\colon \mathbb{R}^4 \ni {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

追跡線 tractrix



特異点

定義 (定義 1.10)

曲線の C^∞-級パラメータ表示 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ において $\dot\gamma(t_0) = \mathbf{0}$ が成り立つとき t_0 をパラメータ表示 γ の特異点という．特異点をもたないパラメータ表示を曲線の正則なパラメータ表示，略して正則曲線という．とくに $|\dot\gamma| = 1$ のとき弧長パラメータ表示という．

弧長パラメータ

曲線のパラメータ表示 $\gamma\colon J \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n$ が弧長パラメータ表示であるとは，$|\gamma'(s)| = 1$ が各 $s \in J$ に対して成り立つことである．このとき s を弧長パラメータという．

命題

正則曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ に対して，これとパラメータ変換で移り合う弧長によりパラメータ表示された曲線 $\tilde{\gamma}\colon J' \to \mathbb{R}^n$ が存在する．

弧長パラメータ

命題

弧長パラメータは定数の差を除いて一意的である.