幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/10/13

目標

定理 (平面曲線の基本定理) κ : kappa

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

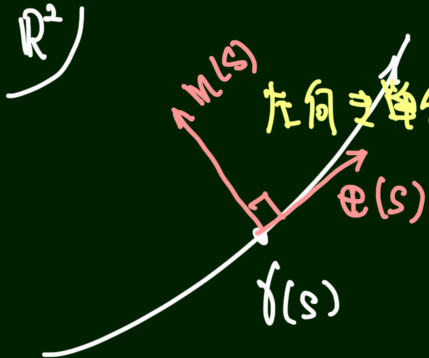
- 曲率が平面曲線を定める．
- たとえば $\kappa(s) = s$ は平面曲線の方程式を与えている．

何でもいい

clothoid

フルネ枠

- $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$：平面曲線の弧長パラメータ表示.
- $\boldsymbol{e}(s) := \dfrac{d\gamma}{ds}(s)$：単位接ベクトル. $|\boldsymbol{e}| = 1$
- $\boldsymbol{n}(s) := R\boldsymbol{e}(s)$；$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. → 左に90°回転
- $\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s))$：フルネ枠. $\boxed{\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(2).}$



左向き単位法線ベクトル

$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e} & \boldsymbol{n} \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$

各s毎に

フルネの公式

$\mathcal{F} = (\mathbf{e}\ \mathbf{n})$

命題 (フルネの公式；命題 2.3)

次をみたす C^∞-級関数 $\kappa \colon J \to \mathbb{R}$ がただ一つ存在する.

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \underline{\Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}}.$$

交代

- $\left(\frac{d\mathbf{e}}{ds}, \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right) = (\mathbf{e}\ \mathbf{n})\begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$

$= (\kappa\mathbf{n}, -\kappa\mathbf{e})$

$\frac{d\mathbf{e}}{ds}\cdot\mathbf{e} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\underbrace{\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}}_{1}) = 0$

$\therefore \frac{d\mathbf{e}}{ds} \perp \mathbf{e}$ $\quad \frac{d\mathbf{e}}{ds} \parallel \mathbf{n}$

$$\frac{dn}{ds} \perp n \qquad \frac{dn}{ds} \parallel e$$

$$\frac{dn}{ds} \cdot e = \cancel{\frac{d}{ds}(n \cdot e)} - n \cdot \frac{de}{ds}$$

部分

$$= -n \cdot (\kappa n) = -\kappa$$

曲率

弧長

$k = \frac{d\theta}{ds} \cdot n$　$\ddot{\gamma} \Rightarrow \frac{\det(\dot{\gamma}\ \ddot{\gamma})}{\ }$

定義

κ を γ の曲率関数，曲率という．

〜度弧長に直して計算

命題

(非弧長)

平面曲線の正則なパラメータ表示 $\gamma(t)$ に対して

$$\kappa(t) = \frac{\det\left(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)\right)}{|\dot{\gamma}(t)|^3}.$$

S: 弧長

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds} = |\dot{\gamma}|\frac{d}{ds}$$

平面曲線の基本定理

定理 (平面曲線の基本定理)

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

次回

$$\theta(s) = \int_*^s \kappa(u)\,du \quad \left(\underline{+\,\mathrm{const}}\right)$$

回転

$$\gamma(s) = \int_*^s \big(\cos\theta(u),\ \sin\theta(u)\big)\,du$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = e \qquad \underline{+\,\mathrm{const}}$$

そして移動

n

$$\frac{de}{ds} = \theta'\big(-\sin\theta(u),\ \cos\theta(u)\big)$$

$$\theta' = \kappa$$

とおくと γ が求めるもの．

問題 2-1

問題

区間 J で関数 $\kappa(s)$ が次で与えられるとき，$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ で，指定された条件を満たすものの具体的表示を求めなさい．

1. $\kappa(s) = a$（定数），$J = \mathbb{R}$; $\gamma(0) = {}^t(a, 0)$， $\dot{\gamma}(0) = {}^t(0, 1)$.
2. $\kappa(s) = 1/(1+s^2)$, $J = \mathbb{R}$; $\gamma(0) = {}^t(0, 1)$， $\dot{\gamma}(0) = {}^t(1, 0)$.

$\cdot = \dfrac{d}{ds}$

問題 2-2

問題

関数 $\kappa(s) = a\cos s + b$ (a, b は定数) を曲率関数にもち，弧長 s によりパラメータ表示された平面曲線を $\gamma_{a,b}(s)$ と書く．

1. $\boldsymbol{e}_{a,b}(s) := \dot{\gamma}_{a,b}(s)$ とおくとき，$\boldsymbol{e}_{a,b}(s+2\pi) = A_{a,b}\boldsymbol{e}_{a,b}(s)$ となる直交行列 $A_{a,b}$ を求めなさい．
2. $b = 1$ のとき，$\gamma_{a,1}(s+2\pi) = A_{a,1}\gamma_{a,1} + \boldsymbol{a}_{a,1}$ となる $\boldsymbol{a}_{a,1}$ を a を用いて表しなさい．

本日の課題の提出締切は

2021 年 10 月 17 日（月曜日）07:00 JST