幾何学概論第一 (MTH.B211)

平面曲線の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/10/13

目標

定理 (平面曲線の基本定理)

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

- 曲率が平面曲線を定める．
- たとえば $\kappa(s) = s$ は平面曲線の方程式を与えている．

フルネ枠

- $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$：平面曲線の弧長パラメータ表示.
- $\boldsymbol{e}(s) := \dfrac{d\gamma}{ds}(s)$：単位接ベクトル.
- $\boldsymbol{n}(s) := R\boldsymbol{e}(s)$；$R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s))$：フルネ枠. $\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(2)$.

フルネの公式

命題 (フルネの公式；命題 2.3)

次をみたす C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ がただ一つ存在する.

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

曲率

定義

κ を γ の曲率関数，曲率という．

命題

平面曲線の正則なパラメータ表示 $\gamma(t)$ に対して

$$\kappa(t) = \frac{\det\bigl(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)\bigr)}{|\dot{\gamma}(t)|^3}.$$

平面曲線の基本定理

定理 (平面曲線の基本定理)

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

問題 2-1

問題

区間 J で関数 $\kappa(s)$ が次で与えられるとき，$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ で，指定された条件を満たすものの具体的表示を求めなさい.

1. $\kappa(s) = a$（定数），$J = \mathbb{R}$；$\gamma(0) = {}^t(a, 0)$，$\dot{\gamma}(0) = {}^t(0, 1)$.
2. $\kappa(s) = 1/(1 + s^2)$, $J = \mathbb{R}$；$\gamma(0) = {}^t(0, 1)$，$\dot{\gamma}(0) = {}^t(1, 0)$.

問題 2-2

問題

関数 $\kappa(s) = a\cos s + b$ (a, b は定数) を曲率関数にもち，弧長 s によりパラメータ表示された平面曲線を $\gamma_{a,b}(s)$ と書く．

1. $\boldsymbol{e}_{a,b}(s) := \dot{\gamma}_{a,b}(s)$ とおくとき，$\boldsymbol{e}_{a,b}(s+2\pi) = A_{a,b}\boldsymbol{e}_{a,b}(s)$ となる直交行列 $A_{a,b}$ を求めなさい．
2. $b = 1$ のとき，$\gamma_{a,1}(s+2\pi) = A_{a,1}\gamma_{a,1} + \boldsymbol{a}_{a,1}$ となる $\boldsymbol{a}_{a,1}$ を a を用いて表しなさい．