2022 年 10 月 13 日 (2022 年 10 月 20 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 2

■お知らせ

- 授業日程訂正：第 3 回と第 4 回の内容を入れ換えます.
- 51 名から課題の提出がありました．受講登録者 59 名 (2022.10.11.); フィードバックは T2SCHOLA.
- 1 件，課題の内容・フォーマットともに不正なものがありました．講義資料をよく読んでおいてください.

■誤字・誤用ギャラリー （【】内が正しい）

- 講議【講義】; 成積【成績】; 孤長【弧長】; 定議【定義】隋円積分【楕円積分】; C_1 級【C^1 級】; 前程【前提】;
- 題意【仮定または結論】; 認識【？】

■前回までの訂正

- 講義資料 1, 4 ページ 7 行目：$[a, b]$ の分割 $a = t_0 \dots \Rightarrow [a, b]$ の分割 $\Delta : a = t_0 \dots$
- 映写資料のページナンバリングに一部不具合があるようです．仕様と思ってください.

■授業に関する御意見

- 質問を強制されるのにレベルが低いと 0 点になるのは自分のような弱者には苦しいしストレスです．このような授業の履修に向いていないのでしょうか． **山田のコメント：** 試験一発で評価可能ですので，向いていないとは言えないのでは？
- 毎回質問を考え出せるのか，そして期末試験できちんと得点できるのか，すでに割と不安です...
  山田のコメント： 毎回講義準備が間に合うかどうか，割と不安です.
- 成積（原文ママ）評価の方法が面白いと思いました． **山田のコメント：** 成積は評価しません．成績は出します.
- a の値を決めるのにとても悩みそうだと思いました． **山田のコメント：** ですよね！
- とても面白くて満足でした **山田のコメント：** Thanks.
- 理学院リテラシの中で，トポロジーのお話を聞いて興味が湧き，数学系に進もうと決めたこともあり，この授業を楽しみにしていました．個人的にはまだまだ数学の楽しさは発見できていないので，雑学のような雑談のような話題にも期待しています.
  山田のコメント： あまり期待しないでください．ハードル高い.
- 先生のお話が面白いので講議（原文ママ）毎回出席しようと思います． **山田のコメント：** ハードルあげたね.
- 話に笑いを入れているのがとても良い． **山田のコメント：** ちゃんと入ってます？
- 数学が得意というわけではないので，気を抜いているとすぐについていけなくなりそうですが，スライドがわかりやすいし，講議（原文ママ）中の先生のジョークも面白いし，とりあえず頑張ろうという気持ちでいっぱいです．このままのモチベーションで継続したいです． **山田のコメント：** よろしく.
- ユニークな先生だと感じました．黒板の pdf はずっと公開していただけると助かります． **山田のコメント：** 一般的だと思う.
- 授業中に休憩をとってくださるため集中度が増します．できれば続けてほしいです． **山田のコメント：** そのつもり.
- 系外の受講ですが，興味があるの講義なのでしっかりと勉強したいです． **山田のコメント：** よろしく.
- 興味本位でお尋ねしたいのですが，LuaLaTeX を使う特段の事情等はありますか． **山田のコメント：** とくにないですが，Unicode の扱いが自然なような気がしたので.（pLaTeX 系は時々わけのわからない動きをする）
- LaTeX のソースを拝借しましたが，命令の使い方など勉強になりました．LaTeX を使い慣れている人はこんな感じで使うのかというのが分かって良かったです． **山田のコメント：** 古い人なので，古いスタイルかもしれません.
- スピードが速いです．板書にしていただければ書きながら理解できるが，スライドはそれを上回るスピードで進むのでつらいです．しかし楽しみです． **山田のコメント：** 申し訳ない．気をつけます.
- 授業で扱ったいくつかの命題の証明が教科書に書いていない（見つけられていないだけかもです）と思うので証明が書かれている pdf の配布や証明の書いてある教科書をスライドに載せてくれると嬉しいです． **山田のコメント：** 具体的にはどの命題？
- 教科書を見ると，心踊る（山田注：心躍る？）ような曲面がたくさん載っていて，これからの授業が楽しみになりました.
  山田のコメント： 絵がかけると楽しくなるんですがね．あまり授業で説明する時間がなくてごめんなさい.
- シラバスの「驚異の定理」までは少なくともついていきたいと思いました． **山田のコメント：** 4Q もよろしく.
- 自分は数学系でなく，きっちりとした数学をしてこなかったので，今日の授業はとても刺激がありました！
  山田のコメント： あまりきっちりとした授業ではありませんが.
- 私は，今回第一種完全隋円積分（原文ママ）を初めて知ったのですが，これは数学系では常識なのでしょうか...先が思いやられます．大変わかりやすい授業をしてくださりありがとうございます． **山田のコメント：** たぶん常識ではないと思います.
- 物理学系なので群に関しては初めてふれることができました．微分幾何は物理や情報幾何に応用できるとのことなので，そこらへんの話も知りたいと思いました． **山田のコメント：** なるほど．この講義の範囲は超えてしまいそうですね.
- 物理学系に所属しています．テストでいい点はとりたいですが，授業の内容にとても興味があって履修したので，それ以上にこの授業を楽しみたいと思います． **山田のコメント：** Enjoy!

質問と回答

質問 1： 講義資料では 1.3 節の初めで曲線のパラメータ表示を C^∞ 級写像として定義していますが，すぐその後の定義 1.7 で「曲線の C^1 級パラメータ表示」という言葉がでてきています．これは C^∞ 級写像の特別な性質として C^1 級であることを用いているのか，それとも C^∞ 写像に限らず C^r 級写像に対して「曲線の C^r 級パラメータ表示」を暗に定義しているのか，どちらでしょうか．

お答え： たしかに曖昧ですね．どちらの意味もあると思いますが，面倒くさいので C^∞ 級のパラメータ表示のみを考えます．長さは C^1 でも定義可能なのでとくにこのように書いています．

質問 2： 注意 1.8 の記述が「γ が C^1 級ならば $\mathcal{L}(\gamma)=\sup_\Delta \mathcal{L}(\gamma)$ が成り立つ」のに対して C^1-級である必要性は何ですか？ たとえば，下図（略；折れ線）のように C^1-級でなくても sup をとることで弧長は表現できると思いました．

お答え： はい，区分的 C^1 級であれば注意 1.8 のような性質が成り立ちます．

質問 3： $\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\dot\gamma(u)|\,du$ で曲線の長さを定義したとき，$\mathcal{L}(\gamma) = \sup\sum$(分割) が成り立つとありますが，逆に $\mathcal{L}(\gamma) = \sup\sum$(分割) を曲線の長さの定義としても問題ないのでしょうか．（sup が存在するときに，それは $\int_a^b |\dot\gamma(u)|\,du$ に一致するか）．

お答え： 区分的 C^1 級ならば一致する．sup が存在しても区分的に C^1 であるとは限らない．したがって，折れ線の長さの sup で定義する方が弧長が定義される対象は広い．

質問 4： 講義資料注意 1.8 について，$\mathcal{L}(\gamma)=\sup_\Delta \mathcal{L}_\Delta(\gamma)$ を示すのに γ が C^1 級という条件をどのように使えばいいですか？

お答え： ここでは証明は扱いませんが，$\lim_{\varepsilon\to 0} x'(t+\varepsilon)=x'(t)$ という形で使います．

質問 5： 曲線の弧長の定義において $|\dot\gamma(t)|$ が連続である必要がある，つまり $\gamma(t)$ が C_1 級（原文ママ：“C^1 級” と上付きにするのが普通）である必要があるとのことでしたが，今回の講義（原文ママ）で定議（原文ママ）は特にしないとおしゃっていた曲線は最低限 $\gamma(t)$ が C_1 級であることを前程（原文ママ）としているでしょうか．また，様々な曲線がある中で $\gamma(t)$ が C_1 級であるもののみ弧長が定義できるということでしょうか．

お答え： 曲線は定義しないが曲線のパラメータ表示は定義した（定義では C^∞ を仮定していたはず）．

質問 6： アステロイド等の区分的に C_1 級（原文ママ）である曲線の弧長は区分的に C_1 級である場所のみで弧長を定義でき，全体としての弧長は定議（原文ママ）できないという認識で合っていますか．

お答え：「認識」という言葉で何をさすか分かりませんのであっているかあっていないかお答えできません．定義できないか，というとできます．各区間での弧長の和です．

質問 7： $\sqrt{2}=1$ の話のときに確かに直線に近づいていくのが面白かったですが，直観的には $\sqrt{2}=1$ になるのにどのようにして $\sqrt{2}\neq 1$ になるのかがよく分かりませんでした．

お答え： 図形が収束しても長さが収束しない．関数列が一様収束してもその微分が収束しないことによる．

質問 8： 陰関数で与えられた曲線の弧長はどう定義するのでしょうか．

お答え： 区分的にパラメータ表示しなおして（たとえばグラフ表示して）求める．

質問 9： $\gamma_1(t) = {}^t(\cos t, \sin t)$ $(0 \leqq t \leqq \underline{4\pi})$ で定義された曲線を C とすると，C は単位円と同じ曲線と言えるのでしょうか．見かけ上は同じ曲線に見えますが，単位円は $\gamma_2(t) = {}^t(\cos t, \sin t)$ $(0 \leqq t \leqq \underline{2\pi})$ とパラメータ表示できるので，単位円の弧長は 2π，C の弧長は 4π となり違うような気がします．

お答え： ここでは異なる曲線とみなすことにします．これについては第 3 回講義で言及します．

質問 10： 講義スライド（略；パラメータ変換の項目）の φ について，$\dot\varphi<0$ では成り立たないことは感覚的に分かるが，$\dot\varphi=0$ も許されない理由が分からないです．ご教授いただければと思います．

お答え： φ は単調増加でなければならない（曲線の向きを変えず，行ったり来たりしない）．単調増加関数であっても $\dot\varphi=0$ となる点をもちうるが，このとき φ の逆関数は対応する点で微分可能でない．

質問 11： 講義資料のパラメーター変換で移りあうことに対して，$\dot\varphi>0$ なる $\varphi\colon J_1\to J_2$ が存在して $\gamma_1=\gamma_2\circ\varphi$ を満たすというのは圏論の普遍性に関係していますか？

お答え： まあ，関係しているといえばしているのでしょうが，ここでは曲線のパラメータ表示全体の集合の同値関係を定義していることになっています．

質問 12： 弧長パラメータ（山田注：弧の旁が「長」になっていました）以外に重要な表示はあるのか．

お答え： 一般的にということでしょうか．個別にはいろいろありますね．講義で扱った円の有理式による表示などはとても重要．

質問 13： 同じ曲線を表していてもパラメータ変換でうつりあう表示とそうでない表示があるようですが，うつりあうときに保存されるような表示の性質はどんなものがありますか？（特異点の存在などにも触れていましたが他にもあるのでしょうか）

お答え： もちろん像は保存されます．第 2 回で扱う曲率関数はこの変換で保存される量です．

質問 14： 2 つの曲線のパラメータ表示がパラメータ変換で移り合うことの定義について，パラメータ変換の写像（講義資料では φ）の逆写像の微分が正という条件も課さないと同値関係にならないような気がしたのですが，どうなのでしょうか．

お答え： $\dot{\varphi} > 0$ なら逆関数の微分公式より φ^{-1} の微分も正．

質問 15：「$\gamma_1(s) = (\cos s, \sin s)$ と $\gamma_2(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ は互いにパラメータ変換で移り合う」とのことでした．円上の点 $(-1, 0)$ を表したいときには γ_1 の場合は π を代入すればよいですが，γ_2 の表示では $(-1, 0)$ を表すことができません．γ_1 のパラメータ表示のしかたの方が何かの意味で性質が良いのですか？

お答え： γ_1 は弧長パラメータ表示，という意味で性質はよいです．一般にパラメータ表示がカバーする範囲が表示によって異なることがあります．あとで他にも例を挙げます．

質問 16： パラメータ変換の定義で $\phi\colon J_1 \to J_2$ が C^∞ 級であることを仮定しているのはなぜですか．例えばもっと緩めて C^n 級にしたときにどのような不都合が生じるのですか．

お答え： パラメータ表示された曲線の定義を「C^∞ 級」としているので φ は C^∞ 級にしておく必要があります．もしも φ の微分可能性が低いと $\gamma \circ \varphi$ が C^∞ 級にならないので．

質問 17： 正則曲線 γ とパラメータ変換で移り合う弧長パラメータ表示は一意的に定まりますか．

お答え： 定数の差を除き一意．

質問 18： ある曲線を記述する弧長パラメータのとり方は，成分どうしの入れ換えや成分の正負の反転など自明なものを除くと，ただ一つに定まりますか．

お答え：「自明なもの」は与えられた曲線のパラメータ変換ではないと思います．

質問 19： 孤長（原文ママ）パラメータ表示について $|\dot{\gamma}| = 1$ というのは $\dot{\gamma}(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}|} = 1$ とあるのですが，孤長パラメータ表示ならば $|\dot{\gamma}| = 1$ ということでしょうか．$|\dot{\gamma}| = 1 \to$ 孤長パラメータ表示という書き方に違和感を覚えました．

お答え： この講義では「$|\dot{\gamma}| = 1$ となるとき弧長パラメータ表示という」と定義しています．

質問 20： 本講義ではパラメータ変換や弧長パラメータに関して扱ったが，弧長パラメータとなるものが複数ある場合（例えば（以下略））のそれぞれの像の描き方の区別を重要視していないように思えます．それはなぜでしょうか．上のような場合でパラメータ変換で移り合う場合は，パラメータ変換してしまえばそれぞれを区別する必要はないかもしれませんが，特にパラメータ変換で移り合わない場合について疑問に思いました．

お答え： 区別したいときは特定します．後半部分：弧長パラメータ同士の関係は $s \mapsto s + k$ (k は定数) なるパラメータ変換に限ります．

質問 21： $|\dot{\gamma}| = 1$ であるとき γ に弧長パラメータという特殊な名前がついているのは，たとえば $\gamma\colon [0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ ($t_1 \in \mathbb{R}$) であるとき，$\mathcal{L}(\gamma) = \cdots = t_1$ とパラメータの変数の値のみで弧長を表せるからでしょうか？ またこの表示にするとどのような利点があるのでしょうか．

お答え： 前半：そうです．後半：今回すこしやります．

質問 22： 曲線の特異点はとがっているようなものですか．

お答え： いいえ．たとえば $\gamma(t) = {}^t(t^3, 0)$ は $t = 0$ に特異点を持ちますが，その像は x 軸です．

質問 23： 特異点 $\gamma'(t) = 0$ が存在するしないでパラメータの性質が変わってくる（同じ曲線でも）と言っていたが，これは "特異点の個数" のようなものでパラメータどうしを分類することができるということか？

お答え： 個数だけでは情報が不足していると思います．

質問 24： ユークリッド空間において標準的な内積に限定しなくてはならない理由がわかりません．

お答え： 線形代数学第二で学んだように有限次元内積空間 V には正規直交基底が存在します．この基底を用いて V に座標を入れてやると，標準的な内積をもったユークリッド空間となるので，標準的な内積以外の内積を考えても考える対象が広がったりはしません．もちろん直交基底でない基底での内積の表示を使うこともありますが．

質問 25： 等長変換の等長という言葉は，パラメータに対し与えられた写像が長さを保つという構造を表しているが，与えられた写像によってパラメータを移したときのパラメータ表示の像が元々のパラメータによるパラメータ表示の像と合同であるという性質を表しているということでよいのか？

お答え： よくない．等長変換は図形のパラメータ表示とは独立．$\mathbb{R}^n$ の変換で 2 点間の距離を保つもの．合同の定義は等長変換で移り合う図形．

質問 26： 講義資料 1 の定理 1.4 により，等長変換 f が $f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ の形に表されていて，逆写像は $f^{-1}(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x} - A^{-1}\boldsymbol{a}$ と表されて，これが等長変換であることから等長変換の全単射性は示されたことになりますか．

お答え： はい．

質問 27： ユークリッド空間での等長変換は上で（略）議論したように全単射ですが，一般の距離空間で等長変換全体が群を作るならば，等長変換の定義に全単射性を課すべきだと思います．

お答え： おっしゃるとおりで「全射性」を仮定する必要があります．単射性は距離を保つことから自動的に従います．

質問 28： 定理 1.4 の証明が今ひとつ思いつきません．f を等長写像とするとき，$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)$ が成立して，f が線型写像なら $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる n 次正方行列がとれて，$|A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \Leftrightarrow A \in \mathrm{O}(n)$ （$\because$ 命題 1.1）とわかるのですが，一般の場合についての良い方針が思いつきません．

お答え： たしかに非自明です．f を $\mathbb{R}^n$ の等長変換とするとき，(1) $g(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0})$ とおくと，g は $g(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ を満たす等長変換．(2) g は内積を保つ：$g(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ $(2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2$ から)．(3) g は線型写像である．(内積の展開公式を用いて $|g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y})|^2 = |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2 = 0$, etc.) あとはご質問の工程で $g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(A \in \mathrm{O}(n))$ と書けるので $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{0})$.

質問 29： 等長変換で保つ距離 d とはどの距離なのでしょうか？ 任意の 2 点の距離とその 2 点に写像 f を作用させた後の距離のことでしょうか？

お答え： はい，それらが一致することが等長変換の定義．

質問 30：（図省略）球：中心を通る任意の直線を軸とする回転移動．楕円・双曲線：xy, yz, zx 平面に関する対称移動．これらは等長変換の 1 つということで合っていますか？ また 2 次曲線と直線では，直交行列 A の形式にどのような違いがあるのでしょうか．

お答え： 等長変換は個々の図形に付随したものではなく，空間全体の変換です．ご質問の意味は，「球面の中心を通る直線に関する回転は球面を保つ等長変換」という意味では正しいですが「2 次曲線の直交行列 A」というのはおかしいです．

質問 31： 今回の講義（原文ママ）で解説された直交行列と等長変換について，直交行列の具体例は等長変換の定義は理解したのですが，2 つの関係がしっかり理解しきれておらず曖昧です．直交行列 $\Leftrightarrow$ 大きさを保つ線形変換（角度が保たれる)，等長変換 $f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ の形（回転と平行移動；山田注：$\det A = -1$ のときは回転ではない）の形で表されるということは，等長変換で原点が変わらなければ，等長変換 f の全体は直交行列ということでしょうか．

お答え： はい．原点を動かさない等長変換は直交行列による線形変換です．

質問 32： $\mathrm{O}(2)\setminus\mathrm{SO}(2)$ の元 $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ は座標軸を θ 回転させてから「x 軸がうつった先の軸」を対称軸として「y 軸がうつった先の軸」を折り返したものになります．このような線型変換の基底の行き先をみて $y = (\tan\frac{\theta}{2})x$ に関する折り返しであることを理解することはできますか？（実際に $\left(\begin{smallmatrix} \cos(-\theta/2) & -\sin(-\theta/2) \\ \sin(-\theta/2) & \cos(-\theta/2) \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{smallmatrix}\right)$ を順にかければそれは $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ になりますが，計算以外で理解したいです）

お答え： ${}^t(1,0)$, ${}^t(0,1)$ の行き先をみればわかる？ 前半の説明，こうなっていますか（よく分かっていない)．

質問 33： 20221006 黒板 B の p8 について，p7 のように回転行列を左から掛けると原点中心に反時計回りに θ 回転するのは感覚と計算から理解できるのですが，p8 の（略：折返しの行列）を左から掛けると $y = (\tan\frac{\theta}{2})x$ に関して点が対称移動することが，固有値とどのように関係するのか疑問です．

お答え： この行列 A の固有値は 1 と -1．対称行列だから，対応固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = {}^t(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$ と $\boldsymbol{v}_{-1} = {}^t(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})$ は互いに直交する（単位ベクトルに正規化している)．任意のベクトル $\boldsymbol{w} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_{-1}\boldsymbol{v}_{-1}$ に対して $A\boldsymbol{w} = a_1\boldsymbol{v}_1 - a_{-1}\boldsymbol{v}_{-1}$．この式をよく見るとわかる．

質問 34： 折返しについて，(行列の積を用いた解釈）は理解できたのですが，固有値を用いた説明がわかりません．

お答え： 上の質問と回答．

質問 35：（略：2 次直交行列の標準形を導いている）これは 3 次元でも同じことができ，かつそのときの未知数の数は 3 つになるのでしょうか？ その場合，n 次元 $(n \geqq 2)$ で $\mathrm{SO}(n)$ が座標の回転と対応することは直感的にどう解釈できるのでしょうか？ また，a_n を $\mathrm{SO}(n)$ の未知数の個数としたとき $a_2 = 1, a_3 = 3$ として一般の n や a_n についての漸化式は存在しますか．

お答え： SO(3) の元が回転を表すことは黒板 B の「3 次直交行列」の項目でわかる（たぶん，これは直感的と思われる）．未知数とはたぶん「パラメータ」のこと．SO(n) を何個のパラメータで表示できるかということ．ただし $n \geqq 3$ だと一通りのパラメータ表示では SO(n) 全体を表すことができない．ちょっと先走った言葉を使えば「SO(n) は $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次元多様体」，したがって $a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$．これらの各元を「回転」とみなすやり方については，適当な線形代数の本で「直交行列の標準形」を調べてみてください．たとえば佐武「線型代数学」にはあったはず．

質問 36： $\mathbb{R}^n$ 上の合同変換は $f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ $(A \in \mathrm{O}(n), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n)$ の形に限り，自由度も有限とのことでしたが，一般の距離空間上の合同変換の自由度に関してはどうなのか疑問に思いました．

お答え： 合同変換が自明（恒等写像）なものしかない場合もありますし，無限次元になる場合もあります．

質問 37： $\mathrm{O}(n) + \boldsymbol{a}$（原文ママ：適切な記法ではありません．O($n$) と $\mathbb{R}^n$ の半直積，しらべてご覧なさい）$\Leftrightarrow$ について $n = 2$ (3) のとき，合同変換が 3 (4) 個の点のうつり先を指定すれば一意に定まり（3 (4) 個の円（球面）の共通部分は点），3 (4) つの点をうつす回転，折返し，平行移動が存在することが示すことができたのですが，$n \geqq 4$ の場合はこのような初等幾何が使えないため，代数的に示すのでしょうか．

お答え： はい．

質問 38： 授業の本筋ではないと思いますが，練習問題ででてきた「$A \in \mathrm{SO}(3)$ ならば A の固有値の 1 つは 1」の示し方が分かりません．（以下略）．

お答え： 一つ説明が抜けていました．(0) 直交行列の固有値は絶対値 1 の複素数（これが抜けていた）(1) 実行列の固有値に対して，その複素共役も固有値 (2) 奇数次の実行列は実数の固有値をすくなくとも一つもつ．(3) すべての固有値の積は行列式と一致する．以上から示せます．

質問 39： 平面上の回転は SO(2) の元により表現できますが，例えば，3 次元空間における回転を表現する行列は存在しますか？（あったら便利かなと思ったので）

お答え： 黒板 B に SO(3) の性質として挙げていますね．ちなみにクォータニオンで表示することもあります．

質問 40： 向きを保つ合同変換・反転する合同変換を分類することでどのような場合に役に立つのでしょうか．

お答え： 向きを考えるときに役立ちます（としか言いようがない）．今回の定義する平面曲線の曲率は向きを保つ合同変換によらないが向きを反転する合同変換では符号を変える．

質問 41： 直交行列の行列式が 1 または -1 であることの証明や群をなすことの証明に $\det(AB) = \det A \times \det B$, $\det(A^t) = \det A$ を使うのですが，証明が難しくて理解できませんでした．

お答え： 積の行列式の公式などの証明ですね．いまのところ気にしないで「こういうもの」と思っていただいてよいと思います．いろいろな証明がありますが，どれもスッキリいきませんね．

質問 42： 群というものについて質問です．群について調べたところ集合 G とその集合上の二項計算 f の組が 3 つの条件を満たす組を群というとありました．3 つの条件とは（略）．授業で出てきた $\mathbb{R}^n$ の等長変換全体は写像の合成に関して群をなすとありますが，どのような集合にたいしてどのような二項演算が存在して 3 つの条件を満たすことは示せるのでしょうか．

お答え： 集合は $\mathbb{R}^n$ の等長変換全体，演算は写像の合成．

質問 43： 黒板 B のスライド 5 枚目や 9 枚目にある「群をなす」というのはどういう意味なのかはっきり分かっていないので説明してほしい．

お答え： 代数学概論第二で扱っています．この科目は「数学系・数学コース」の科目ですので，そのカリキュラムは前提としていること，ご理解ください．

質問 44： 幾何は何を同じとみなすかが重要だとおっしゃっていましたが（定義にも依ると思いますが）同じとみなす条件が一番厳しいのが合同で，緩いのがトポロジーなんでしょうか．もっと厳しくないと同じでない，もっと緩くても同じとできるというのはあるのでしょうか．

お答え： 一番，というのが何かわかりませんが，いろいろな同値関係（群）が考えられます．“Erlangen Program” で検索．

質問 45： 幾何学では何と何を同じとみなすかが重要だと話されていました．そこで，変換前後で基準を変えて同じとみなすという概念はあるのでしょうか．例えば，多次元上で平面からなる立体から 2 次元の変換を立体の体積から表面積への変換と定め，このとき異なる立体でも前後が等しいあたいなら同じ立体とみなすなど．

お答え： 例えば，のあとの意味が読み取れません．ひょっとして数学的でない語を用いていませんか？

質問 46： なぜ位相幾何では同相という “ゆるい” ものを用いるのか．逆を言えば合同がここまで厳しいのはなぜか．

お答え： 何を見たいかによって「同値」関係を変えているだけなのでなぜと言われましても．

質問 47： cos (山田注：cos ですね) を複素関数として考えれば，ユークリッド空間の概念を $\mathbb{C}^n$ にでも考えられるよう

に思うのですが，実際可能でしょうか．

お答え： 何が可能かによりますね．$\mathbb{C}^n$ には標準的なエルミート内積が考えられますが，それ以外の “内積” を考えることもあります．

質問 48： 物理では，実数しか意味を持たない物理量をあえて複素数で考えて考えやすくすることがありましたが，ユークリッド空間など実数を対象とする幾何学でもそのようなことはあるのでしょうか．

お答え： しばしばあります．複素にすると随分違った風景が現れますね．山田に近いところでは「ワイエルシュトラス表現公式」．4Q で「等温座標系」を扱う際に複素座標による表示を考えます．

質問 49： 曲線のパラメータ表示における特異点や正則といった言葉の使い方と，正則行列の正則，複素関数の正則や特異点と何か関連があるのでしょうか．

お答え： 正則：regular；特異：singular の訳語．

質問 50： 物理では引数が関数のときに $\mathcal{L}(\gamma)$ と書かずに $\mathcal{L}[\gamma]$ と鍵括弧（山田注：たぶん鉤括弧）を使うのが主流らしいが，そのことは数学ではあまり気にしなくてよいのでしょうか．

お答え： 自分の周りではそういう記法はあまり見ません．

質問 51： 黒板 B の最後のスライドにおいて，等長変換に f などの名前をつけた方がいいのではないかと思った．

お答え： f を以下で使っていないので，不要と思いました（無名関数）．

質問 52： 逆関数定理のところに（一変数）と書いてありましたが，区間の $f' \neq 0$ のところを f の導関数の n 次行列（山田注：ヤコビ行列のこと？ 言葉を覚えましょう）が正則ということに変えれば $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に拡張できるということですか？

お答え： 一変数を特別扱いしたのには少し理由があります．第 7 回か 4Q で説明します．

質問 53： C^∞ の定義のときに「∞ 回微分したらいけない」とおっしゃっていましたがどうしてですか？

お答え： 無限回微分ってできますか？ たとえば $f(x) = \sin x$ の無限次導関数は何ですか？

質問 54： 先生は SO(2) は覚えているとおっしゃっていましたが，具体的にはどのような研究で使うのですか？

お答え： 平面の回転はどんなところでも使うと思います．掛け算九九のレベル．

質問 55： 問題 1-1 で扱っている曲線はレムニスケート？

お答え： はい．

質問 56： 1-2 の (2) に出てくる $(\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ はトラクトリクスですか？ 今回の $\mathbb{R}^4$ の図形も擬球とかと関係あったりしますか？

お答え： 前半：はい．後半：トラクトリクス（追跡線）のルジャンドル持ち上げ．時間があれば今回，あるいは数回後に説明します．

質問 57： 成績評価について，もし $x_{\max} = 0$ の場合はどのように決定されるのですか．

お答え： 授業で説明したようにこれはバグです．しかし，すでに $x_{\max} > 0$ となりました．

質問 58： 特異点を持っていたほうが扱いやすくなることはあるか．

お答え： 何がでしょう．特異点を持っている・いないというのはパラメータ表示された個々の曲線固有の性質ですから，その曲線が「扱いやすく」なる，というのは意味がありませんね．

質問 59： 曲線の交点を普遍に保つ変換というものは行列などを使って表せますか．

お答え： 曲線は一つ固定する？ 何の変換？ $\mathbb{R}^n$ の変換のことを考えているなら「全単射ならば交点は保たれる」はずですね．

2 平面曲線の基本定理

2.1 弧長パラメータ（復習）

曲線のパラメータ表示[*1]$\gamma\colon J \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n$ が**弧長パラメータ表示**であるとは，$|\dot\gamma(s)| = 1$ が各 $s \in J$ に対して成り立つことである．このとき s を**弧長パラメータ**という[*2]．

命題 2.1. 正則曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ に対して，これとパラメータ変換で移り合う弧長によりパラメータ表示された曲線 $\tilde\gamma\colon J' \to \mathbb{R}^n$ が存在する．

証明： 固定点 $t_0 \in J$ に対して $s(t) := \int_{t_0}^t |\dot\gamma(u)|\,du$ とおけばよい．実際，$t \mapsto s(t)$ は $ds/dt > 0$ を満たすので，なめらかな逆関数 $s \mapsto t(s)$ が存在する．そこで $\tilde\gamma(s) := \gamma\bigl(t(s)\bigr)$ とおけば，

$$\left|\frac{d\tilde\gamma(s)}{ds}\right| = \left|\frac{dt(s)}{ds}\frac{d\gamma}{dt}\bigl(t(s)\bigr)\right| = \left|\frac{1}{ds/dt(t(s))}\frac{d\gamma}{dt}\bigl(t(s)\bigr)\right| = \frac{1}{|\dot\gamma(t(s))|}\left|\frac{d\gamma}{dt}\bigl(t(s)\bigr)\right| = 1.$$

命題 2.2. 弧長パラメータは定数の差を除いて一意的である．

証明： パラメータ変換で移り合う曲線 $\gamma(t)$, $\tilde\gamma(s)$ がともに弧長パラメータ表示とする．パラメータ変換を $t \mapsto t(s)$ とかくと $dt/ds > 0$ なので $\bigl|\frac{d\tilde\gamma}{ds}(s)\bigr| = \frac{dt(s)}{ds}\bigl|\frac{d\gamma}{dt}(t(s))\bigr|$ だから $dt/ds = 1$．したがって $t(s) = s + a$ (a は定数)．

2.2 平面曲線

ここでは $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ を区間 J 上で定義された，座標平面 $\mathbb{R}^2$ の曲線の弧長パラメータ表示とする．

$$\boldsymbol{e}(s) := \frac{d\gamma}{ds}(s), \qquad \boldsymbol{n}(s) := R\boldsymbol{e}(s) \qquad \left(R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

により $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}\colon J \to \mathbb{R}^2$ を定義すると，各 s に対して $\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底を与える．とくに $\mathcal{F}(s) := \bigl(\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s)\bigr)$ とおくと $\det\mathcal{F}(s) = 1$ となるので $\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(2)$ となる．この $\mathcal{F}$ を γ の**フルネ枠**，$\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$ をそれぞれ**単位接ベクトル**（または単位速度ベクトル），**左向き単位法線ベクトル**という．

命題 2.3 (フルネの公式)**.** 次をみたす C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ がただ一つ存在する．

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \Omega(s) := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

証明： 各 s に対して $\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底なので，任意の $\mathbb{R}^2$ の要素はこれらの線形結合．そこで

$$\tfrac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s) = a_{11}(s)\boldsymbol{e}(s) + a_{21}(s)\boldsymbol{n}(s), \qquad \tfrac{d\boldsymbol{n}}{ds}(s) = a_{12}(s)\boldsymbol{e}(s) + a_{22}(s)\boldsymbol{n}(s)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
a_{11}(s) &= \bigl(a_{11}(s)\boldsymbol{e}(s) + a_{21}(s)\boldsymbol{n}(s)\bigr)\cdot\boldsymbol{e}(s) = \frac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s)\cdot\boldsymbol{e}(s) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\bigl(\boldsymbol{e}(s)\cdot\boldsymbol{e}(s)\bigr) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}1 = 0 \\
a_{22}(s) &= \bigl(a_{12}(s)\boldsymbol{e}(s) + a_{22}(s)\boldsymbol{n}(s)\bigr)\cdot\boldsymbol{n}(s) = \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\bigl(\boldsymbol{n}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)\bigr) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}1 = 0 \\
a_{21}(s) &= \frac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s) = \frac{d}{ds}\bigl(\boldsymbol{e}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)\bigr) - \boldsymbol{e}(s)\cdot\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}(s) = -\boldsymbol{e}(s)\cdot\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}(s) = -a_{12}(s).
\end{aligned}$$

したがって $a_{21}(s) = \kappa(s)$ とおくと $\boldsymbol{e}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{n}'(s) = -\kappa(s)\boldsymbol{e}(s)$.

2022 年 10 月 13 日 (2022 年 10 月 20 日訂正)

[*1] とくに断りのない限り，曲線のパラメータ表示，パラメータ変換は C^∞-級としておく．

[*2] テキストに従って，弧長パラメータを表すときは文字 s を用いる．また，弧長パラメータに関する微分を $' = d/ds$ で表す．

定義 2.4. 命題 2.3 の κ を平面曲線 γ の**曲率**または**曲率関数**という．また，弧長とは限らない平面曲線の正則なパラメータ表示 $\gamma(t)$ に対して，$\tilde{\gamma}(s) := \gamma\bigl(t(s)\bigr)$ をその弧長パラメータ表示，$\tilde{\kappa}(s)$ を $\tilde{\gamma}$ の曲率関数とするとき，$\gamma(t)$ の曲率関数を $\kappa(t) := \tilde{\kappa}(s(t))$ で定義する．ただし $s(t)$ は $t(s)$ の逆関数である．

命題 2.5. 平面曲線の正則なパラメータ表示 $\gamma(t)$ に対して $\kappa(t) = \det\bigl(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)\bigr)/|\dot{\gamma}(t)|^3$ で与えられる．

証明： 弧長関数 $s = s(t)$ の逆関数 $t = t(s)$ を用いて $\tilde{\gamma}(s) = \gamma\bigl(t(s)\bigr)$ と弧長パラメータ表示をすると，$dt/ds = 1/|\dot{\gamma}|$ から

$$\tilde{\boldsymbol{e}}(s) := \frac{d}{ds}\tilde{\gamma}(s) = \frac{dt}{ds}\frac{d\gamma}{dt}\bigl(t(s)\bigr) = \frac{1}{\bigl|\dot{\gamma}\bigl(t(s)\bigr)\bigr|}\dot{\gamma}\bigl(t(s)\bigr)$$

は $\tilde{\gamma}$ の単位接ベクトル．$\tilde{\gamma}$ のフルネ枠を $\widetilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\boldsymbol{e}}, \tilde{\boldsymbol{n}})$ とおけば，

$$\tilde{\kappa}(s)\tilde{\boldsymbol{n}}(s) = \frac{d\tilde{\boldsymbol{e}}}{ds}(s) = \frac{1}{|\dot{\gamma}|}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|}\dot{\gamma}\right) = \frac{1}{|\dot{\gamma}|}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\dot{\gamma}|}\right)\dot{\gamma} + \frac{1}{|\dot{\gamma}|}\ddot{\gamma}\right).$$

したがって $\det\widetilde{\mathcal{F}} = 1$ であることに注意すれば，$\det(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ より $\tilde{\kappa} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|^3}\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$.

2.3 平面曲線の基本定理

補題 2.6. 正則な平面曲線 γ の曲率関数は変換 $\gamma \mapsto \tilde{\gamma} := A\gamma + \boldsymbol{a}$ $(A \in \mathrm{SO}(2),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2)$ で不変である．

証明： $\dot{\tilde{\gamma}} = A\dot{\gamma}$, $\ddot{\tilde{\gamma}} = A\ddot{\gamma}$ なので A が直交行列であることから $|\dot{\tilde{\gamma}}| = |\dot{\gamma}|$，さらに $\det(\dot{\tilde{\gamma}}, \ddot{\tilde{\gamma}}) = \det(A(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})) = \det A \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$ なので命題 2.5 から結論が得られる．

定理 2.7 (平面曲線の基本定理)**.** 区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータ付けられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

証明：一意性： 弧長で表された二つの曲線 $\gamma(s)$, $\tilde{\gamma}(s)$ の曲率関数がともに $\kappa(s)$ とする．γ, $\tilde{\gamma}$ のフルネ枠をそれぞれ $\mathcal{F}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ とおくと，フルネの公式（命題 2.3）から，$\frac{d}{ds}\widetilde{\mathcal{F}}^t\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}'^t\mathcal{F} + \widetilde{\mathcal{F}}^t\mathcal{F}' = \widetilde{\mathcal{F}}(\Omega + {}^t\Omega)^t\mathcal{F} = O$. したがって $A := \widetilde{\mathcal{F}}^t\mathcal{F} \in \mathrm{SO}(2)$ は s によらない定行列．$\mathcal{F}^{-1} = {}^t\mathcal{F}$ に注意すれば $A\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$．とくに $\mathcal{F}$ の第一列は γ', $\widetilde{\mathcal{F}}$ の第一列は $\tilde{\gamma}'$ なので $\tilde{\gamma}' = A\gamma' = (A\gamma)'$．したがって $\tilde{\gamma} = A\gamma + \boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2)$.
存在： $s_0 \in J$ を一つ固定して，次のようにおけばこれが求めるものである：

$$\gamma(s) := \int_{s_0}^{s} {}^t\bigl(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\bigr)\,du, \qquad \theta(s) := \int_{s_0}^{s}\kappa(u)\,du.$$

問題

2-1 区間 J で関数 $\kappa(s)$ が次で与えられるとき，$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ で，指定された条件を満たすものの具体的表示を求めなさい．

(1) $\kappa(s) = a$（定数），$J = \mathbb{R}$；$\gamma(0) = {}^t(1/a, 0)$ $(a \neq 0)$，$\gamma(0) = {}^t(0, 0)$ $(a = 0)$，$\dot{\gamma}(0) = {}^t(0, 1)$.

(2) $\kappa(s) = 1/(1 + s^2)$, $J = \mathbb{R}$；$\gamma(0) = {}^t(0, 1)$，$\dot{\gamma}(0) = {}^t(1, 0)$.

2-2 関数 $\kappa(s) = a\cos s + b$ (a, b は定数) を曲率関数にもち，弧長 s によりパラメータ表示された平面曲線を $\gamma_{a,b}(s)$ と書く．ただし $\dot{\gamma}_{a,b}(0) = {}^t(1, 0)$ とする．

(1) $\boldsymbol{e}_{a,b}(s) := \dot{\gamma}_{a,b}(s)$ とおくとき，$\boldsymbol{e}_{a,b}(s + 2\pi) = A_{a,b}\boldsymbol{e}_{a,b}(s)$ となる直交行列 $A_{a,b}$ を求めなさい．

(2) $b = 1$ のとき，$\gamma_{a,1}(s + 2\pi) = A_{a,1}\gamma_{a,1}(s) + \boldsymbol{a}_{a,1}$ となる $\boldsymbol{a}_{a,1}$ を a を用いて表しなさい．