幾何学概論第一 (MTH.B211)

閉曲線

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/10/20

復習：平面曲線の基本定理（存在）

定理 (平面曲線の基本定理 (1))

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．

- $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$: フルネ枠 $\in SO(2)$
- $\dot{\boldsymbol{e}} = \kappa \boldsymbol{n}$, $\dot{\boldsymbol{n}} = -\kappa \boldsymbol{e}$.

・$e = \dfrac{d\gamma}{ds}$ 単位接ベクトル

・n : 左向き法線

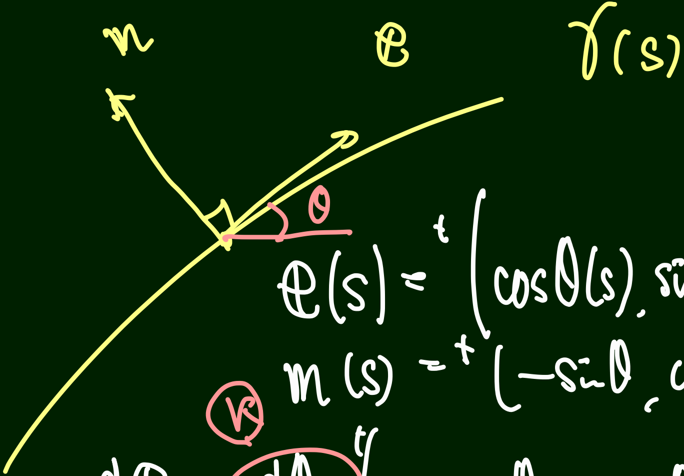
$s_0 \in J$ を一つ固定して，次のようにおく：

$$\gamma(s) := \int_{s_0}^{s} {}^t\big(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\big)\, du, \qquad \theta(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\, du \ \boxed{+\,\mathrm{const}}$$

$+\,\mathrm{const}$ $\quad {}^t\big(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\big) = e = \dfrac{d\gamma}{ds}$

$\theta(s_0) = 0$

$\gamma(s_0) = 0$



$$\boldsymbol{e}(s) = {}^t(\cos\theta(s), \sin\theta(s))$$

$$\boldsymbol{n}(s) = {}^t(-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}}{ds} = \underbrace{\frac{d\theta}{ds}}_{\kappa}\ \underbrace{{}^t(-\sin\theta \quad \cos\theta)}_{\boldsymbol{n}}$$

問題 2-1

問題

区間 J で関数 $\kappa(s)$ が次で与えられるとき，$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ で，指定された条件を満たすものの具体的表示を求めなさい．

a

1. $\kappa(s) = a$（定数），$J = \mathbb{R}$；$\gamma(0) = \begin{cases} {}^t(1/a, 0) & a \neq 0 \\ {}^t(0,0) & a = 0 \end{cases}$

   $\dot\gamma(0) = {}^t(0,1)$.
2. $\kappa(s) = 1/(1+s^2)$, $J = \mathbb{R}$；$\gamma(0) = {}^t(0,1)$，$\dot\gamma(0) = {}^t(1,0)$.

問題 2-1 (1a)

$(\cos\theta \quad \sin\theta)$

$\kappa(s) = 0$; $\gamma(0) = {}^t(0,0)$; $\dot\gamma(0) = {}^t(0,1)$ $\qquad \theta(0) = \frac{\pi}{2}$

$$\theta(s) = \left(\int_0^s 0\, ds\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$= 0 + \frac{\pi}{2}$$

du

$$\gamma(s) = \int_0^s \left(\cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= {}^t(0, s)$$

直線

問題 2-1 (1b)

$$\kappa(s) = a \neq 0;\ \gamma(0) = {}^t(1/a, 0);\ \dot\gamma(0) = {}^t(0,1)$$

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \int_0^s a\,du + \frac{\pi}{2} = as + \frac{\pi}{2}$$

$${}^t(\cos\theta, \sin\theta) = {}^t\left(\cos\left(as + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(as + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= {}^t(-\sin as, \cos as)$$

$$\gamma(s) = \int_0^s {}^t(-\sin au, \cos au)\,du + {}^t\left(\frac{1}{a}, 0\right)$$

$$= \frac{1}{a}\,{}^t(\cos a\cancel{u}^{\,s}, \sin a\cancel{u}^{\,s})$$

$$\gamma(s) = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} \cos as \\ \sin as \end{pmatrix}$$

半径 $\frac{1}{a}$ の円

$a<0$ 右回り

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma\left(s + \frac{2\pi}{a}\right) = \gamma(s)$$

periodic

$$s_1 \sim s_2 \iff s_2 - s_1 \in \frac{2\pi}{a}\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{R}/\sim \; = S^1$$

"円周"

問題 2-1 (2)

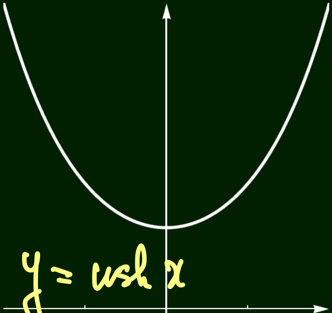
$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2};\ \gamma(0) = {}^t(0,1);\ \dot\gamma(0) = {}^t(1,0)$$

$$\theta(0) = 0$$

$$\theta = \int_0^s \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\theta = \cos\tan^{-1} s = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$



$y = \cosh x$

catenary

懸垂線

$$\gamma(s) = \int_0^s \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right) du$$

$$+ (0, 1)$$

$$= \left(\log\left(s + \sqrt{1+s^2}\right), \sqrt{1+s^2} \right)$$

$$= \left(\underset{\substack{\| \\ x}}{\sinh^{-1} s}, \ \underset{\substack{\| \\ \cosh x}}{\sqrt{1+s^2}} \right)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

復習：平面曲線の基本定理（一意性）

定理 (平面曲線の基本定理 (2))

弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものは回転と平行移動を除いて一意である．

- $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$：フルネ枠
- $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega$, $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$

γ_1, γ_2 : 平面曲線

$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$

$$\Rightarrow \gamma_2 = \underset{\underset{SO(2)}{\in}}{A}\gamma_1 + \underset{\underset{\mathbb{R}^2}{\in}}{q}$$

$\gamma_1 \rightsquigarrow F_1 \qquad F_1' = F_1 \Omega$

$\gamma_2 \rightsquigarrow F_2 \qquad F_2' = F_2 \Omega$

$$\underbrace{(F_2 \, {}^tF_1)'}_{A \text{ const}} = F_2 \Omega \, {}^tF_1 + F_2 \, {}^t\Omega \, {}^tF_1 \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

$\| $ 直交

F^{-1}

$${}^t\Omega$$

$$+ \Omega = 0$$

$$= F_2 \underbrace{\left(\Omega + {}^t\Omega\right)}_{=0} {}^tF_1$$

$$= 0$$

$$F_2 = A F_1 \longrightarrow e_2 = A e_1$$

$A \longrightarrow$ const $\quad \gamma_2' = A \gamma_1'$

κ：周期 L

$\Rightarrow \gamma(s+L) = A\gamma(s) + a$

となる $A \in SO(2)$

$a \in \mathbb{R}^2$

が存在する

問題 2-2

問題

関数 $\kappa(s) = a\cos s + b$ (a, b は定数) を曲率関数にもち，弧長 s によりパラメータ表示された平面曲線を $\gamma_{a,b}(s)$ と書く．
$\boxed{\text{ただし } \dot{\gamma}_{a,b}(0) = {}^t(1,0)}$

1. $\boldsymbol{e}_{a,b}(s) := \dot{\gamma}_{a,b}(s)$ とおくとき，$\boldsymbol{e}_{a,b}(s+2\pi) = A_{a,b}\boldsymbol{e}_{a,b}(s)$ となる直交行列 $A_{a,b}$ を求めなさい．
2. $b = 1$ のとき，$\gamma_{a,1}(s+2\pi) = A_{a,1}\gamma_{a,1}(s) + \boldsymbol{a}_{a,1}$ となる $\boldsymbol{a}_{a,1}$ を a を用いて表しなさい．

$$\kappa(s) = a\cos s + b,\ \dot\gamma(0) = {}^t(1,0)$$

$$\theta(s) = \int_0^s (a\cos u + b)\,du = \underline{a\sin s + b\cancel{u}\,s}$$

non periodic

$$\boldsymbol{e}(s) = \dot\gamma(s) = \big(\cos\theta(s),\ \sin\theta(s)\big)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}\cos bs & -\sin bs\\ \sin bs & \cos bs\end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix}\cos(a\sin s)\\ \sin(a\sin s)\end{pmatrix}}_{2\pi \text{ periodic}}$$

κ : periodic

$\not\Rightarrow$ γ : periodic

$$\boldsymbol{e}(s+2\pi) = \begin{pmatrix}\cos 2\pi b & -\sin\\ \sin & \cos\end{pmatrix}\cdot \boldsymbol{e}(s)$$

$b \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = I$

問題 2-2 (2)

$\gamma(s+2\pi) = A\gamma(s) + a$

$A = I$

$$\kappa(s) = \cancel{a\cos s} + 1,\ \dot\gamma(0) = {}^t(1,0)$$

$$\boldsymbol{e}(s) = \dot\gamma(s) = \begin{pmatrix}\cos(a\sin s + s)\\ \sin(a\sin s + s)\end{pmatrix}$$

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix}x(s)\\ y(s)\end{pmatrix} = \int_0^s \begin{pmatrix}\cos(a\sin u + u)\\ \sin(a\sin u + u)\end{pmatrix} du$$

$$a = \boxed{\gamma(s+2\pi) - \gamma(s)} = \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix}\cos(a\sin u + u)\\ \sin(a\sin u + u)\end{pmatrix} du$$

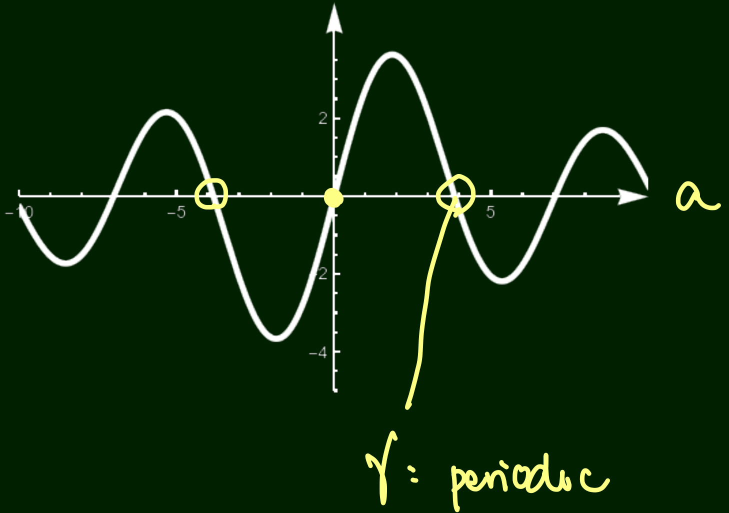
$s+2\pi$, s

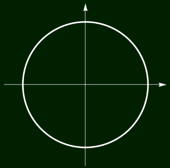
odd

$$= \begin{pmatrix}-2\pi J_1(a)\\ 0\end{pmatrix}$$

Bessel's function

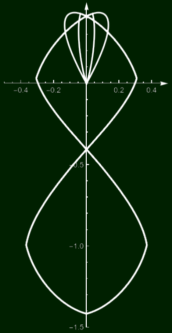
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix}\cos(a\sin u + u)\\ 0\end{pmatrix} du$$


2
−10
−5
5
−2
−4
a
γ: periodic

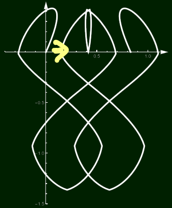


$a = 0$

$a = 1$



$a \sim 3.83$



$a = 4$