幾何学概論第一 (MTH.B211)

閉曲線

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/10/20

復習：平面曲線の基本定理（存在）

定理 (平面曲線の基本定理 (1))

区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．

- $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$：フルネ枠
- $\dot{\boldsymbol{e}} = \kappa\boldsymbol{n}$, $\dot{\boldsymbol{n}} = -\kappa\boldsymbol{e}$.

$s_0 \in J$ を一つ固定して，次のようにおく：

$$\gamma(s) := \int_{s_0}^{s} {}^t\bigl(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\bigr)\, du, \qquad \theta(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\, du.$$

問題 2-1

問題

区間 J で関数 $\kappa(s)$ が次で与えられるとき，$\kappa(s)$ を曲率にもつ弧長によりパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ で，指定された条件を満たすものの具体的表示を求めなさい.

1. $\kappa(s) = a$（定数），$J = \mathbb{R}$；$\gamma(0) = \begin{cases} {}^t(1/a, 0) & a \neq 0 \\ {}^t(0, 0) & a = 0 \end{cases}$
   $\dot\gamma(0) = {}^t(0, 1)$.
2. $\kappa(s) = 1/(1 + s^2)$, $J = \mathbb{R}$；$\gamma(0) = {}^t(0, 1)$，$\dot\gamma(0) = {}^t(1, 0)$.

問題 2-1 (1a)

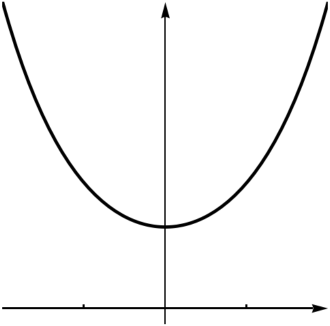
$$\kappa(s) = 0;\ \gamma(0) = {}^t(0,0);\ \dot{\gamma}(0) = {}^t(0,1)$$

問題 2-1 (1b)

$$\kappa(s) = a \neq 0;\ \gamma(0) = {}^t(1/a, 0);\ \dot{\gamma}(0) = {}^t(0, 1)$$

問題 2-1 (2)

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2};\ \gamma(0) = {}^t(0,1);\ \dot{\gamma}(0) = {}^t(1,0)$$



復習：平面曲線の基本定理（一意性）

定理 (平面曲線の基本定理 (2))

弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものは回転と平行移動を除いて一意である．

- $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$：フルネ枠
- $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega$, $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$

問題 2-2

問題

関数 $\kappa(s) = a\cos s + b$ (a, b は定数) を曲率関数にもち，弧長 s によりパラメータ表示された平面曲線を $\gamma_{a,b}(s)$ と書く.
ただし $\dot{\gamma}_{a,b}(0) = {}^t(1,0)$

1. $\boldsymbol{e}_{a,b}(s) := \dot{\gamma}_{a,b}(s)$ とおくとき，$\boldsymbol{e}_{a,b}(s+2\pi) = A_{a,b}\boldsymbol{e}_{a,b}(s)$ となる直交行列 $A_{a,b}$ を求めなさい.
2. $b = 1$ のとき，$\gamma_{a,1}(s+2\pi) = A_{a,1}\gamma_{a,1}(s) + \boldsymbol{a}_{a,1}$ となる $\boldsymbol{a}_{a,1}$ を a を用いて表しなさい.

問題 2-2 (1)

$\kappa(s) = a\cos s + b$, $\dot{\gamma}(0) = {}^t(1,0)$

$\theta(s) = \int_0^s (a\cos u + b)\,du = a\sin s + bu$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(s) = \dot{\gamma}(s) &= \bigl(\cos\theta(s)\ \sin\theta(s)\bigr) \\ &= \begin{pmatrix}\cos bs & -\sin bs \\ \sin bs & \cos bs\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(a\sin s) \\ \sin(a\sin s)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

問題 2-2 (2)

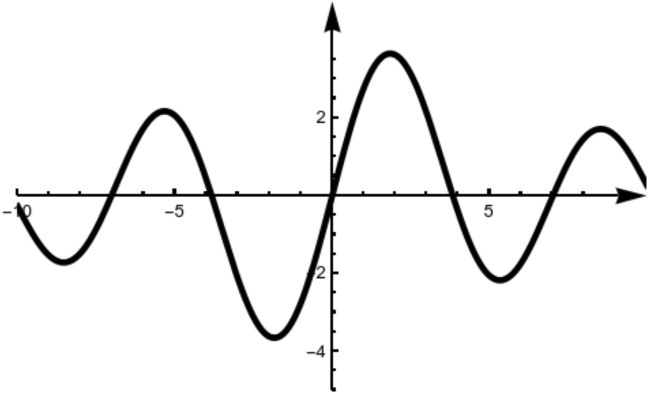
$\kappa(s) = a\cos s + 1$, $\dot\gamma(0) = {}^t(1,0)$

$$\boldsymbol{e}(s) = \dot\gamma(s) = \begin{pmatrix} \cos(a\sin s + s) \\ \sin(a\sin s + s) \end{pmatrix}$$

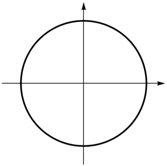
$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \int_0^s \begin{pmatrix} \cos(a\sin u + u) \\ \sin(a\sin u + u) \end{pmatrix} du$$

$$\gamma(s+2\pi) - \gamma(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \cos(a\sin u + u) \\ \sin(a\sin u + u) \end{pmatrix} du = \begin{pmatrix} -2\pi J_1(a) \\ 0 \end{pmatrix}$$

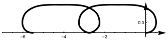
$\boldsymbol{a}_{a,1}$



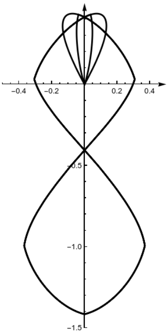
$\gamma_{a,1}$



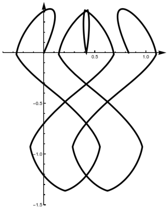
$a = 0$



$a = 1$



$a \sim 3.83$



$a = 4$