幾何学概論第一 (MTH.B211)

閉曲線

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/10/20

閉曲線とは

閉曲線：

- $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ：C^∞-級
- γ が周期 L（> 0）を持つ

(loop) 閉曲線ではない

単純閉曲線：

- 自己交叉をもたない閉曲線

$$\gamma(s_1) = \gamma(s_2) \ \& \ s_1 \not\equiv s_2 \pmod{L}$$

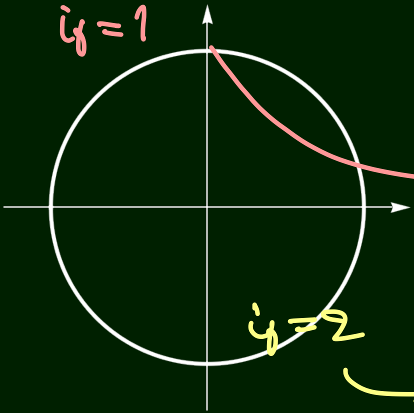
閉曲線の例

半径 r の円：

$r = \frac{1}{a}$

$$\gamma(s) = {}^t\left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

$i_\gamma = 1$



単純閉曲線

(period: $\underline{2\pi r}$)

$\boxed{\text{区別}}$

$\underline{4\pi r}$

$i_\gamma = 2$

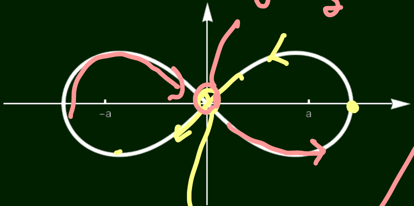
レムニスケート

$a > 0$ に対して

$$\gamma(t) = {}^t\!\left(\frac{\sqrt{2}a\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sqrt{2}a\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)$$

$t = \frac{3}{2}\pi$

2π-periodic



$t = \frac{\pi}{2}$

自己交叉

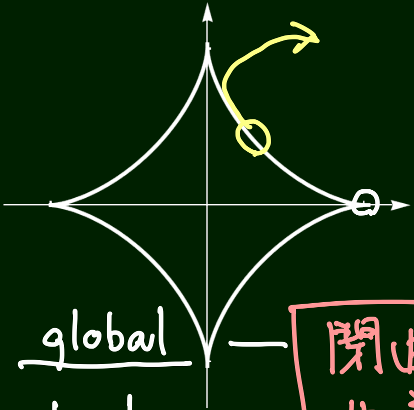
$i_\gamma = 0$

アステロイド

astroid (cf. asteroid)

$a > 0$ に対して

$$\gamma(s) = {}^t(a^3\cos^3 t, a^3\sin^3 t)$$



$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

singularities (特異点)

global — 閉曲線である：大域的性質

local — 曲率：局所的性質

全曲率と回転数

- $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$：弧長パラメータ表示された周期 L の閉曲線
- $\mathcal{F}(s) := (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s))$：フルネ枠
- $\kappa(s)$：曲率

定義 (全曲率・回転数) total curvature

$$T_\gamma := \int_0^L \underline{\kappa(s)}\, ds \qquad i_\gamma := \frac{1}{2\pi} T_\gamma$$

弧長

$$\kappa(t) \frac{ds}{dt}\, dt$$

命題

閉曲線の回転数は整数である．

ためいき

$$\theta = \int_0^s \kappa(u)\, du \qquad = \kappa(t) \underbrace{|\dot{\gamma}|\, dt}_{=ds}$$

$$\gamma' = \boldsymbol{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

周期 L の閉曲線

$$\mathbf{e} = {}^t(\cos\theta \quad \sin\theta)$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

$$\int_0^L \kappa(s)\,ds = \underline{\theta(L) - \theta(0)}$$

$$\mathbf{e}(s+L) = \mathbf{e}(s)$$

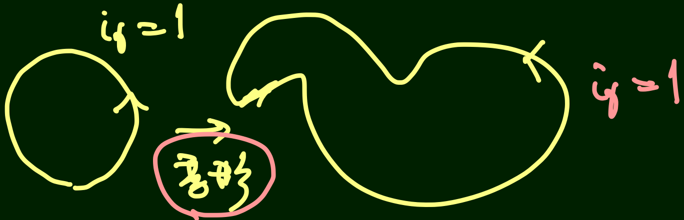
$$\Rightarrow \quad \theta(L) - \theta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

閉曲線のなめらかな変形

定義

周期 L の 2 つの正則閉曲線 $\gamma_0(t)$，$\gamma_1(t)$ が
なめらかな変形で移りあう（正則ホモトピー同値）であるとは，
C^∞-級写像 $\sigma\colon [0,1] \times \mathbb{R} \ni (\alpha, t) \to \sigma_\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ で次を満たすもの
が存在することである：

- $\alpha \in [0,1]$ を固定するとき，$\sigma_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は周期 L の正則閉曲線である．
- $\sigma_0(t) = \gamma_0(t)$，$\sigma_1(t) = \gamma_1(t)$ が成り立つ．



回転数の不変性

命題

2 つの正則閉曲線 γ_0, γ_1 が正則ホモトピー同値ならば，回転数は一致する.

回転数の不変性

事実

- 2つの正則閉曲線の回転数が一致するならば，それらは正則ホモトピー同値である（ホイットニーの定理，テキスト 33 ページ，定理 3.3）.
- 単純閉曲線の回転数は 1 または -1 である（テキスト 31 ページ，定理 3.2）.

曲線の大域的性質

大域的性質の例：

- 閉曲線であること.
- 回転数
- 単純閉曲線であること
- 4 頂点定理（テキスト 25 ページ，定理 2.10；45 ページ，定理 4.4）

問題 3-1

問題

周期 2π の閉曲線

$$\gamma_a(t) = {}^t\bigl(\cos t, \sin t(a + \cos t)\bigr)$$

の全曲率を求めなさい．ただし a は負でない定数である．

問題 3-2

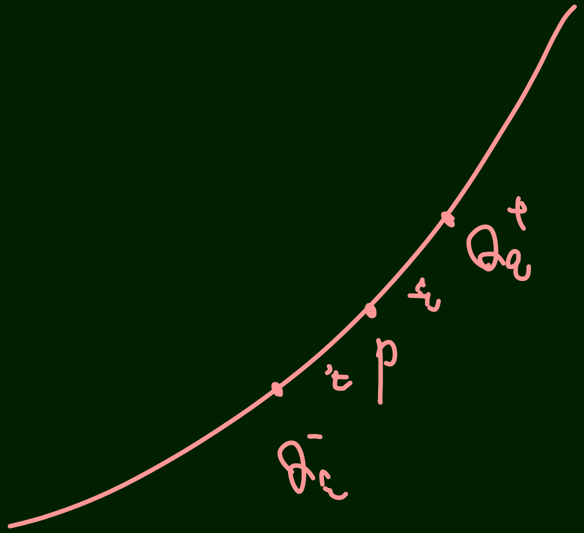
問題

弧長パラメータで表示された正則曲線 $\gamma\colon J \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ 上の点 $\mathrm{P} := \gamma(s_0)$ における曲率 $\kappa_0 = \kappa(s_0)$ が零でないとき，十分小さい正の数 ε に対して 3 点 P, $\mathrm{Q}_\varepsilon^- := \gamma(s_0 - \varepsilon)$，$\mathrm{Q}_\varepsilon^+ := \gamma(s_0 + \varepsilon)$ を通る円の中心を C_ε とおく．$s = s_0$ におけるフルネ枠を $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{n}_0) := (\boldsymbol{e}(s_0), \boldsymbol{n}(s_0))$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}_\varepsilon^-} = p^-(\varepsilon)\boldsymbol{e}_0 + q^-(\varepsilon)\boldsymbol{n}_0, \qquad \overrightarrow{\mathrm{PQ}_\varepsilon^+} = p^+(\varepsilon)\boldsymbol{e}_0 + q^+(\varepsilon)\boldsymbol{n}_0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PC}_\varepsilon} = \alpha(\varepsilon)\boldsymbol{e}_0 + \beta(\varepsilon)\boldsymbol{n}_0$$

とおくとき，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \begin{pmatrix} p^\pm(\varepsilon) & q^\pm(\varepsilon) \\ \dot{p}^\pm(\varepsilon) & \dot{q}^\pm(\varepsilon) \\ \ddot{p}^\pm(\varepsilon) & \ddot{q}^\pm(\varepsilon) \\ \alpha(\varepsilon) & \beta(\varepsilon) \end{pmatrix}$$


P

本日の課題の提出締切は

2021年10月24日（月曜日）07:00 JST