

幾何学概論第一 (MTH.B211)

閉曲線

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/>

東京工業大学理学院数学系

2022/10/20

閉曲線とは

閉曲線：

- ▶ $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : C^\infty$ -級
- ▶ γ が周期 $L (> 0)$ を持つ

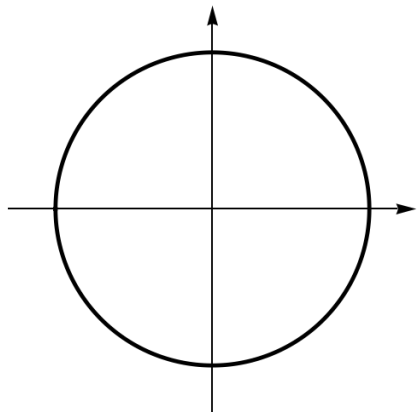
単純閉曲線：

- ▶ 自己交叉をもたない閉曲線

閉曲線の例

半径 r の円：

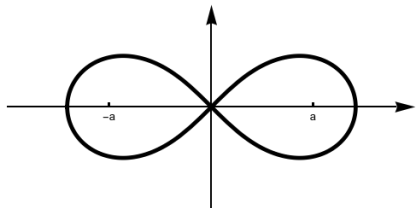
$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} r \cos \frac{s}{r} \\ r \sin \frac{s}{r} \end{pmatrix}$$



レムニスケート

$a > 0$ に対して

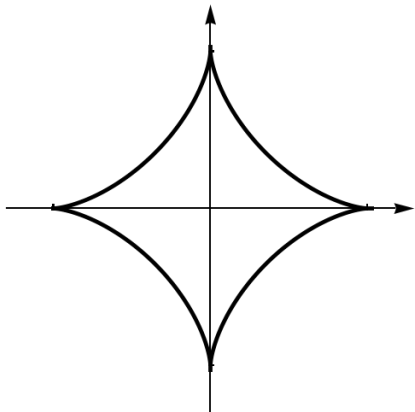
$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sqrt{2}a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \end{pmatrix}$$



アステロイド

$a > 0$ に対して

$$\gamma(s) = {}^t(a^3 \cos^3 t, a^3 \sin^3 t)$$



全曲率と回転数

- ▶ $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$: 弧長パラメータ表示された周期 L の閉曲線
- ▶ $\mathcal{F}(s) := (\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s))$: フルネ枠
- ▶ $\kappa(s)$: 曲率

定義 (全曲率・回転数)

$$T_\gamma := \int_0^L \kappa(s) ds, \quad i_\gamma := \frac{1}{2\pi} T_\gamma$$

命題

閉曲線の回転数は整数である.

閉曲線のなめらかな変形

定義

周期 L の2つの正則閉曲線 $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ が
なめらかな変形に移りあう (正則ホモトピー同値) であるとは,
 C^∞ -級写像 $\sigma: [0, 1] \times \mathbb{R} \ni (\alpha, t) \rightarrow \sigma_\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ で次を満たすものが存在することである:

- ▶ $\alpha \in [0, 1]$ を固定するとき, $\sigma_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は周期 L の正則閉曲線である.
- ▶ $\sigma_0(t) = \gamma_0(t)$, $\sigma_1(t) = \gamma_1(t)$ が成り立つ.

回転数の不変性

命題

2つの正則閉曲線 γ_0, γ_1 が正則ホモトピー同値ならば、回転数は一致する.

回転数の不変性

事実

- ▶ 2つの正則閉曲線の回転数が一致するならば、それらは正則ホモトピー同値である（ホイットニーの定理，テキスト 33 ページ，定理 3.3）.
- ▶ 単純閉曲線の回転数は 1 または -1 である（テキスト 31 ページ，定理 3.2）.

曲線の大域的性質

大域的性質の例：

- ▶ 閉曲線であること.
- ▶ 回転数
- ▶ 単純閉曲線であること
- ▶ 4 頂点定理 (テキスト 25 ページ, 定理 2.10 ; 45 ページ, 定理 4.4)

問題 3-1

問題

周期 2π の閉曲線

$$\gamma_a(t) = {}^t(\cos t, \sin t(a + \cos t))$$

の全曲率を求めなさい。ただし a は負でない定数である。

問題 3-2

問題

弧長パラメータで表示された正則曲線 $\gamma: J \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ 上の点 $P := \gamma(s_0)$ における曲率 $\kappa_0 = \kappa(s_0)$ が零でないとき, 十分小さい正の数 ε に対して3点 $P, Q_\varepsilon^- := \gamma(s_0 - \varepsilon), Q_\varepsilon^+ := \gamma(s_0 + \varepsilon)$ を通る円の中心を C_ε とおく. $s = s_0$ におけるフルネ枠を $(\mathbf{e}_0, \mathbf{n}_0) := (\mathbf{e}(s_0), \mathbf{n}(s_0))$ として,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ_\varepsilon^-} &= p^-(\varepsilon)\mathbf{e}_0 + q^-(\varepsilon)\mathbf{n}_0, & \overrightarrow{PQ_\varepsilon^+} &= p^+(\varepsilon)\mathbf{e}_0 + q^+(\varepsilon)\mathbf{n}_0, \\ \overrightarrow{PC_\varepsilon} &= \alpha(\varepsilon)\mathbf{e}_0 + \beta(\varepsilon)\mathbf{n}_0\end{aligned}$$

とおくとき,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \begin{pmatrix} p^\pm(\varepsilon) & q^\pm(\varepsilon) \\ \dot{p}^\pm(\varepsilon) & \dot{q}^\pm(\varepsilon) \\ \ddot{p}^\pm(\varepsilon) & \ddot{q}^\pm(\varepsilon) \\ \alpha(\varepsilon) & \beta(\varepsilon) \end{pmatrix}$$