2022 年 10 月 20 日 (2022 年 10 月 27 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 3

■お知らせ

- 47 件の課題提出がありました．受講登録者 53 名 (2022.10.19. 先週より 6 減); フィードバックは T2SCHOLA.

■誤字・誤用ギャラリー （【】内が正しい）

- 隋円積分【楕円積分；二回目】
- 認識【？ ；二回目】，気になります【？ ；質問なんでしょうか】；いまいち【今一つ？】

■前回の補足

- 平面曲線の基本定理の証明で挙げた，与えられた曲率関数から曲線を構成する式がどうやって得られたか，という質問が複数：そのような曲線があったとすると，$\gamma' = \boldsymbol{e}$（$' = d/ds$）は単位ベクトルなので $\boldsymbol{e}(s) = {}^t(\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ を満たす θ が存在する（少しごまかしがはいっている）．このとき $\boldsymbol{e}'(s) = \theta'(s){}^t(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)) = \theta'(s)\boldsymbol{n}(s)$ なので $\dot\theta = \kappa$．ここから逆算．
- 高次元ユークリッド空間の曲線の曲率，基本定理などについてのご質問が複数ありました．$\mathbb{R}^3$ の曲線については第 5 回，一般の場合についてはどこかでコメントします．
- フルネ枠 $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$ は $\boldsymbol{e}$ のみで決まるが，わざわざ行列にする理由の質問が複数．平面曲線の基本定理の「一意性」の証明には行列の形が便利．
- 楕円積分が初等関数にならないことの証明に関する質問が複数．Liouville による結果のようです[*1]．
- 単位法線 $\boldsymbol{n}$ を右向きでなく左向きにとるのは特別な意図があるか，という質問が複数．$\det(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}) = 1$，すなわちフルネ枠が $\mathrm{SO}(2)$ に入るようにしたかった．
- 問題 2-1 で初期条件を満たす s_0 の値がとれない，という質問が複数ありました．曲線を表示する公式は「存在」を示すために使われたものですべての曲線を表しているわけではありません．

■前回までの訂正

- 群は「代数学概論第二」で扱うと述べましたが「代数学概論第三」でした．勘違いしていました．
- 講義資料 2, 8 ページ 10 行目：$\det\mathcal{F} = 1$ であること注意すれば ⇒ $\det\widetilde{\mathcal{F}} = 1$ であることに注意すれば
- 講義資料 2, 問題 2-1 (1)：$\gamma(0) = {}^t(a, 0)$ ⇒ $\gamma(0) = {}^t(1/a, 0)$（$a \neq 0$），$\gamma(0) = {}^t(0, 0)$（$a = 0$）
  修正しなくても問題は成立するがこの方がきれい．当日口頭でご指摘された方，誤解して回答しました．申し訳ありません．
- 講義資料 2, 問題 2-2：$\gamma_{a,b}(s)$ と書く ⇒ $\gamma_{a,b}(s)$ と書く．ただし $\dot\gamma_{a,b}(0) = {}^t(1, 0)$ とする．
  初期条件を指定しないと (2) の解答に任意性がある．
- 講義資料 2, 問題 2-2 (2)：$\gamma_{a,1}(s + 2\pi) = A_{a,1}\gamma_{a,1} + \boldsymbol{a}_{a,1}$ ⇒ $\gamma_{a,1}(s + 2\pi) = A_{a,1}\gamma_{a,1}(s) + \boldsymbol{a}_{a,1}$

■授業に関する御意見

- 地図の話が面白いと思いました．メルカトルの生きた 16 世紀には微積分がなかったはずなのですごいことだと思いました．
  山田のコメント：そうですね．歴史的経緯を調べるのも面白そうですね．
- 曲率は力学の等速円運動の加速度の大きさに似ているなと思いました．向きを含めて考えると，速度ベクトルに直交し，曲線が膨らんでいる方向とは逆向きになるところなどをみてそう思いました． **山田のコメント：**そうです．
- 対面授業のおかげで逆に朝早起きできるようになりました． **山田のコメント：** よかったね．
- 前回より人が少なくなったが，授業が聞きやすくなり，個人的にとても有難かったです．もし，オンラインでなく対面で試験がなされるとしたら，大きめの教室で 1 人 1 人の間隔がある程度とれるようにしてもらえると助かります．
  山田のコメント：出席者が減るのはありがたいことかどうか...現時点での受講登録者（53 名）は試験時の講義室定員（56 名）ぎりぎりなので，部屋の変更はむずかしそうです．先週からの 6 減が残念です．適当な時期に交渉してみましょうか．
- 先週よりも人が減っていて快適でした．講義資料を見て，質問や意見，その反答の数の多さに驚きました．手書きのレポートから資料を作成していくのは大変そうだと感じました． **山田のコメント：**それほどでもない．直前に校正をする TA が気の毒．
- みんなが書いた意見や質問とその回答が見られるのは面白いです．他の人がどんな事を考えているのかが分かると新しい発見があります．ちなみに回答と解答ってどう使い分けるんでしょう．
  山田のコメント：山田は「質問の回答」「問題の解答」と使い分けています．
- 他の方の質問とそれに対する解答が見れるのが良いと思いました． **山田のコメント：**でしょ．
- 質問に丁寧に答えてくれてありがとうございます． **山田のコメント：**どういたしまして．
- 質問が思いつかない場合は，どうでも良い資料のミスを指摘してお茶を濁そうと思います．
  山田のコメント：そうしてください．ちゃんと読まないとミスも見つかりにくいですよね．

[*1] 一松信「初等関数の数値計算」1974, 教育出版，付録 A に証明がある．

- 前の週の演習問題が講義の題材になっていると，その背後にある物語を知ったときにより面白く感じられるように思います．
  山田のコメント： そうですね．
- 質問しようとしたけど解決してしまった場合，その解決の過程（実際の証明など）を記したら点数はもらえますか？
  山田のコメント： 原則としてはい．
- 面白いので満足です． **山田のコメント：** Thanks.
- 講義を受けてぼんやりと思っていたことなのですが，先生は数学的側面以外での現象としての物理に興味がありますか．興味があるとすればどのような分野に興味がありますか． **山田のコメント：** いろいろ．ただ，どうも物理的な感覚が鈍いような気がしてなにもわかった気がしないです．ローレンツ幾何でいくつか論文を書いているんですがね．
- 漢字を間違えてしまった．将来のためにとてもありがたいが怖い． **山田のコメント：** 怖くないよ．笑い話にしようね．
- 誤字の晒しは斬新で，その上良い確認になりました． **山田のコメント：** ごめんね．
- 内容の大半が回答に当てられたので，質問をひねり出すのが難しかった． **山田のコメント：** そこが力のみせどころ．
- すでに難しい…がんばります!! **山田のコメント：** よかった．易しすぎたら失礼だと思っていたので．
- 例年，課題の最高点 $x_{\max}$ は何点くらいになりますか？ **山田のコメント：** いろいろ．8 割〜10 割くらいです．
- 課題と期末の比率を決定する a の値はどのような分布になることが多いでしょうか． **山田のコメント：** 多くは 1．0 が少し
- 今（10/16）更ですが，教科書を購入しました． **山田のコメント：** お買い上げありがとうございます！
- 毎回，宿題？ の問題の積分が大変ですね（笑） **山田のコメント：** いいえ，まだまだ（笑）

質問と回答

質問 1： 弧長パラメータは定数の差を除いて一意的であるという命題がありました．どういうものをパラメータと同一視しているのかいまいち分かりません． **お答え：** 命題 2.2 の証明をみるとわかるはずです．「いまいち」とは?

質問 2： 2.2 平面曲線の項で弧長パラメータ表示を用いるうれしさは何でしょうか．フルネの公式も，弧長パラメータでなくても定数倍のズレが生じるだけで，特に問題なく思います．$\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s)\}$ が正規とは限らない直交基底となるので，$\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(2)$ ではなくなりますが，そこまで大きな違いと感じません．(SO(2) がよく知っている群だから SO(2) を値域にしたいのでしょうか） **お答え：** 定数倍ではなく「関数倍」でずれます．一般に弧長でないパラメータでは加速度ベクトルは速度ベクトルに直交しません．

質問 3： （山田注：講義資料 2, 命題 2.5 の証明）について $\det\mathcal{F} = 1$ を使うのは，$\det\mathcal{F} = \det(\boldsymbol{e}, \kappa\boldsymbol{n}) = \kappa\det(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$ としたということでよろしいでしょうか． **お答え：** よろしくありません．$\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$ です．

質問 4： $\gamma(t)$ が弧長パラメータ表示でないときは $d\boldsymbol{e}(t)/dt = \kappa(t)\boldsymbol{n}(t)$ は成り立たないのですか．

お答え： 成り立ちません．たとえば $\gamma(t) = {}^t(\operatorname{sech} t, \tanh t)$（単位円の右半分の表示，曲率は 1）で試してみましょう．

質問 5： $\kappa(s) = \frac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$ と最初から定義しても良いように思われたのですが，講義資料では $d\mathcal{F}/ds = \mathcal{F}\Omega$（$\Omega =$（略））を満たす C^∞ 級関数として κ を定義しているのはなぜでしょうか． **お答え：** 同等なのでどちらでもよいですが，後半で扱う空間曲線，4Q で扱う曲面などで枠の考え方が重要になるのでこの形にしました．

質問 6： 本講義では曲率を定義 2.4 のように定義しているが，$\kappa(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$ と曲率を定義するのは，定義 2.4 と同じ定義にあたるのでしょうか？ $\kappa(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$ だけだと弧長パラメータについて触れられていないので，曲率の意味が異なる気がします… **お答え：** ご提案のような定義でも s が弧長であることは必要です．その上で $\theta(s)$ をどう定義するかが問題ではないでしょうか？

質問 7： フルネの公式の表式が与えられた曲率関数に対して，曲線のパラメータ表示の微分 $\boldsymbol{e} = {}^t(dx/ds, dy/ds)$, $\boldsymbol{n} = {}^t(-dy/ds, dx/ds)$ に関する微分方程式を解くことで，$\gamma(s)$ の表式が求まると思ったのですが，これは本講義で与えられた課題で用いた積分を用いて曲線を求める方法とは，積分を解く動作と微分方程式を解く動作が異なるだけで，本質的には同等なものなのでしょうか． **お答え：** 同等．空間曲線の基本定理は微分方程式を解いて示す．

質問 8： 平面曲線の基本定理で固定する γ の s_0 と θ の s_0 はパラメータと独立していればそれぞれ異なる s_0, s_1 をおいても問題ないだろうか？ $s_0 < s < s_1$ の場合でも不具合ないと思っています． **お答え：** 不具合ありません．

質問 9： 定理 2.7 で（略：平面曲線の表現公式）で課題をやるとき 2 回現れる s_0 を同じにする必要があると考えてしまったので，s_0, s_1 と書いた方がいいと思います． **お答え：** たしかにそうかもしれませんね．この公式は「存在」を示すだけと考えれば誤りを書いてあるわけではありませんが.

質問 10： 積分の下端が 0 でなく任意定数なのは $0 \in J$ でない場合を考えたいからですか． **お答え：** はい．

質問 11： フルネの公式を満たす κ が一意に定まることから，この κ が曲線の特徴量として機能しているということでしょうか？ **お答え：** はい．

質問 12： 等しい曲率をもつ弧長パラメータ表示された 2 つの曲線は回転と平行移動で移り合いますが，弧長パラメータでないパラメータで表されている場合，“曲率が等しいこと” の図形的な意味はあるのでしょうか．

お答え： 例えば $\gamma_1(u)$, $\gamma_2(t)$ が一般のパラメータで表示された曲線，$\kappa_1(u)$, $\kappa_2(t)$ をそれぞれの曲率としたとき，これらが「等しい」ということを定義するためには u と t に何らかの関係が必要です．

質問 13： p. 8, 9 行目の両辺と $\tilde{\boldsymbol{e}} = \dot{\gamma}/|\dot{\gamma}|$ を並べた行列式を考えれば 10 行目が得られる？ **お答え：**はい．

質問 14： 黒板 C, p. 6 平面曲線の基本定理について，$\kappa\colon J \to \mathbb{R}$ や $\gamma\colon J \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級関数である必要はありますか．C^1 級で導関数が連続であった場合に定理が成り立たないような反例などありますでしょうか． **お答え：**C^1 級の曲線の曲率は定義できない．一般に γ が C^r 級なら曲率は C^{r-2} 級．$2 \leqq r < \infty$ の場合も基本定理は成り立つ．

質問 15： 講義では曲率関数が C^∞ 級であることを定義に含めていますが，その条件を外して曲率を定義することはありますか．もしそのように定義すれば C^2-級の曲線にも曲率が定義できてうれしいことにはならないでしょうか．

お答え： おっしゃるとおりです．第 5 回で扱う空間曲線では C^3 級を要求します．このように問題によって要求される微分可能性が異なって面倒なので C^∞ 級にしてしまいました．

質問 16： 任意の C^∞ 級平面曲線の曲率関数は C^∞ 級になりますか． **お答え：**γ が C^∞ の時 $\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$ はどうですか？

質問 17： 正則性をなくしたり微分可能性を弱くしたりして多くの曲線を考えたときに，曲率のような有用な不変量は何かありますか． **お答え：**答えになっているかどうかわかりませんが，カスプとよばれている特異点をもつ曲線に対する曲線論の基本定理を考えることができます[*2]

質問 18： 非正則なパラメータ表示に平面曲線の基本定理に似た定理は存在しますか． **お答え：**「非正則なパラメータ表示」はさまざまなものがあるので統一的には扱えません．カスプについては上の質問と回答を参照．

質問 19： 正則な平面曲線の曲率が存在することが分かりましたが，正則でない曲線については，曲率，あるいは類似のものを考えることはできますか？ 例えば一部分に注目すればできそうですが，特異点を除くなどの工夫で何かできないのか気になります． **お答え：**「気になる」というフレーズ，質問なのか気になります．2 つ前の回答参照．

質問 20： ${}^t(\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ が $\gamma(s)$ の速度ベクトルだったので，$\kappa(s)$ は加速度のような意味合いをもつと考えられますか． **お答え：**速さ 1 のときの加速度の大きさ（符号付き）．

質問 21： 曲率というのは曲率半径の逆数であると思いますが，そうであれば必ず正の値をとりますか．曲率を求める式で $\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)) < 0$ となれば κ は負の値をとると思いました． **お答え：**問題 2-1 (1) で $a < 0$ の場合．

質問 22： 半径が $1/a$（$a > 0$）の球面を考えた時，その大円を描くような弧長によりパラメータ付けられた曲線の曲率が a であると思うのですが，より一般に，半径が a である球面にのるような弧長によりパラメータ付けられた曲線の曲率 κ に対して，κ の最小値は a になると言えますか． **お答え：**「最小値」という語の使い方が正しくないと思いますが，半径 $1/a$ の球面上の曲線の「空間曲線としての曲率」（第 5 回）は a 以上です．

質問 23： レムニスケートについて，自己交叉する点は異なる点と考える，という話でしたが，$\{(x-a)^2 + y^2\}\{(x+a)^2 + y^2\} = a^4$ を考えるとき，十分小さい a を考えると点の軌跡は点に近づきますが，各点は異なる点だから，弧長は 0 でない値をとると考えるのでしょうか．

お答え： はい，$a > 0$ である限り弧長は正ですね．自己交点の議論とは違うと思いますが．

質問 24： 特異点が折れ曲がったり自己交叉をする点であったりすることが分かった．しかし，パラメータによっては自己交叉などが特異点にならない場合がある．特異点以外にも折れ曲がったり自己交叉したりと判定する方法があるのか伺いたい． **お答え：**パラメータ表示と陰関数表示では特異点の意味が違う．現段階ではパラメータ表示の特異点の説明しかしていないが，陰関数表示については第 7 回．パラメータ表示では自己交点と特異点は直接関係ない．

質問 25： $\mathcal{F}\colon J \ni s \mapsto (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s)) = \begin{pmatrix} e_1(s) & n_1(s) \\ e_2(s) & n_2(s) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ において，$\mathcal{F}'(s) = (\boldsymbol{e}'(s), \boldsymbol{n}'(s)) = \begin{pmatrix} e_1'(s) & n_1'(s) \\ e_2'(s) & n_2'(s) \end{pmatrix}$ としましたが，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ の微分（略）としたものを拡張して $F\colon \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ の微分を（略：成分ごとに微分する）とする感じでしょうか？ それとも単に $\mathcal{F}(s) = (e_1(s), e_2(s), n_1(s), n_2(s)) \in \mathbb{R}^4$ とみて $\mathcal{F}\colon J \to \mathbb{R}^4$ としただけでしょうか．しかし $\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$ は縦ベクトルですよね．また，上の行列の話を拡張して $\mathcal{F}\colon \mathrm{M}_{k,l}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ のような写像の微分 $\mathcal{F}'(X)$ などを考えられますか．また良い性質を持ちますか？

お答え： 前半：最初に述べられていることで正しいですが，あとのように書いたものと違いはありません．いずれにせよ $(\mathcal{F}(t+h) - \mathcal{F}(t))/h$ の極限．極限をとるためには値域の距離構造が必要だが，それはユークリッド距離とみなしておけばよい．後半：多変数関数になるので $\mathcal{F}'(X)$ は意味がなさそうですね．全微分や各成分に関する偏微分は意味があります．良い性質，といわれても微分の性質です．

質問 26： 2-1 (1) で曲率が一定 (a：定数) で曲線が半径 $1/a$ の円であることから考えると，一般の曲線で局所的に見ればある点での曲率 $\kappa(s_0)$ は一定とみなせて，半径 $1/\kappa(s_0)$ の “接円” みたいなものが考えられるような気がしま

[*2] 佐治健太郎・梅原雅顕・山田光太郎「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学」2017/2022；丸善出版，付録 B.

す． **お答え：**気がするよね．次回扱う曲率円（＝接触円 osculating circle）．

質問 27： 問題 2-2 の平面曲線 $\gamma_{a,b}(s)$ はどの区間で定義されているのでしょうか．

お答え： 曖昧にしていますが $\mathbb{R}$．高等学校流に，断りがなければ意味がある最大の区間と考えて良い．

質問 28： 曲率 $\kappa(s) = s$ の曲線は Clothoid という名前がついていましたが，今回の曲率 $\kappa(s) = 1/(1+s^2)$ の曲線にもなにか特殊な名前はついているのでしょうか？ **お答え：**Catenary，懸垂線．

質問 29： 問題 2-2 の続きとして $\gamma_{a,b}(s+2\pi)$ と $\gamma_{a,b}(s)$ の曲率を計算したところ等しいと分かりました．このことは補題 2.6 からもわかりますが，s からのズレが 2π である理由は何でしょうか？ κ の周期と関係ある？

お答え： $\kappa_{a,b}$ が 2π 周期なので $\gamma_{a,b}$ の曲率も 2π 周期．

質問 30： 教科書ではフルネの公式の応用として 4 頂点定理が挙げられていましたが，頂点を調べることあるいは個数を知ることがいまひとつピンとこないので教えてほしいです．頂点に関連した曲線の性質などがあるのでしょうか．

お答え： はい，縮閉線の特異点など．単純閉曲線には 4 つ頂点があることから，もしも頂点が 2 つしかなかったら，かならず自己交叉をもつこともわかりますね．

質問 31： 第 1 回の課題ででてきた $\hat{\gamma}(t) = {}^t(\operatorname{sech} t, t - \tanh t)$ はトラクトリクスですが，$\gamma(t) = {}^t(\operatorname{sech} t, t - \tanh t, \operatorname{sech} t, \tanh t)$ も四次元空間の有名な図形なのですか？ **お答え：**講義で少し言及しましたが，トラクトリクスのルジャンドル持ち上げ（Legendrian lift）です．ここでは深入りしません．

質問 32： tractrix の定義で「y 軸におろした接線の長さ $= 1$」とすれば $y = 0$ で定義されない曲線ですか？（犬の移動を定義にすれば $y = 0$ で $x = 1$？）

お答え： ${}^t(1, 0)$ が特異点だから，ということでしょうか．実はこの場合には特異点においても接線が引けます．

質問 33： 追跡線がさまざまなところで現れるとおっしゃっていましたが，（それは幾何学的な意味でだと思いますが）何か工業的な応用もあったりするのでしょうか．

お答え： 山田は詳しくないのですが，“tractrix industry” で検索すると色々出てきます．スピーカーホーンの形とか．

質問 34： フルネの公式について $\mathcal{F}\Omega =$（略）なので $\boldsymbol{e}'(s) = \boldsymbol{n}(s)\kappa(s)$…となりそうなのですが，別の定義が $\boldsymbol{e}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$…なのはどうしてでしょうか？ **お答え：**$\kappa(s)$ はスカラなので，右からかけても左からかけても同じ．習慣的に左から掛けることが多い．行列表示の際は，曲線に回転（$A \in \mathrm{SO}(2)$）を施すと枠が $\mathcal{F} \mapsto A\mathcal{F}$ と変わることから，左からではなく，右から Ω をかける必要がある．

質問 35： 曲率関数 $\gamma(s)$ について $s_0 \in J$ を 1 つ固定して $\gamma(s) =$（略），$\theta(s) =$（略；講義資料 2, 8 ページ，定理 2.7 の証明の中にある式）とおくことにより $\kappa(s)$ が求まるとありましたが，これはなぜでしょうか（以下略）．

お答え： 大きく勘違いしていませんか．$\kappa(s)$ が求まるなどとどこにも書いてないと思います．与えられた関数 $\kappa(s)$ から $\kappa(s)$ を曲率にもつ曲線が求まる，です．

質問 36： 定理 2.7 において「C^∞ 級曲線で」とありますが，命題 2.5 において $\dddot{\gamma}(t)$ が出てくるので「×：C^∞ 級；○ C^1 級を除く」の方が正しいのでは？ と思ったのですが，C^1-級でも良い理由が知りたいです．

お答え： 「C^∞ 級とは任意の r に対して C^r 級」と説明したあたりを誤解されているのだと思います．「γ が C^∞ 級である」とは，「(γ が C^0 級である) and (γ が C^1 級である) and (γ が C^2 級である)…」ということ．したがって，C^∞-級曲線といったらそれは自動的に C^2 級になります．

質問 37： 曲率の具体的なイメージが掴みにくいと感じました．曲率の値の大小でどのように変わっていくのでしょうか．

お答え： 前半：あなたの感想でしょうか？ 後半：何が変わっていくのでしょうか．

質問 38： $\dot{\gamma} \perp \ddot{\gamma}$ とすれば曲率の定義は円運動の公式と一致しますね． **お答え：**次回少しコメントします．

質問 39： $\kappa(s)$ で曲線のカタチを決め，$\dot{\gamma}(s)$ の初期条件で曲線の向きを，$\gamma(s)$ の初期条件で曲線の位置（平行移動）を決めるという認識であっていますか？ **お答え：**認識するのはあなたの自由なのであっているかは判定できません．

質問 40： 「曲率」とてもおもしろいですね．道の曲率が変化するほど車がスピードを出しにくい，という感覚でしょうか．かといって，曲率が一定だと円になりグルグルまわってしまう．せめて変化の仕方が一定な曲率 $\kappa(s) = as$ がちょうど良さそうですね． **お答え：**で，質問は？ 前半ですが「曲率が変化するほどスピードを出しにくい」というのは曲率の定義のどこから来ているのでしょう．定義ではパラメータを弧長にとっていますから，スピードは一定なはずですが．後半：そういう曲線を clothoid といって…ということに言及しましたね．

質問 41： 平面曲線についての曲率を今回やりましたが，n 次元空間にも曲率は定義できますか？ 今回の定義を流用すればパラメータが 1 つの時はできそうな気がしますが，2 つ以上になるとどうなるか知りたいです．

お答え： n 次元空間の曲率ですか．一般に n 次元リーマン多様体の曲率を考える，という意図ではないですよね．「n 次元空間の曲線」でしょうか？ そうだとするとパラメータは 1 つですね．曲面やさらに高次元の部分多様体を考えている？ いずれにせよ，もう少し先でやります．

3 閉曲線

■平面曲線（復習） 弧長によってパラメータ付けられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon \mathbb{R}\supset J\to\mathbb{R}^2$ の単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s):=\gamma'(s)$ に対して，左向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ をとると，フルネ枠 $\mathcal{F}:=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})\colon J\to \mathrm{SO}(2)$ が得られる．$\mathcal{F}'=\mathcal{F}\Omega$（$\Omega:=\left(\begin{smallmatrix}0&-\kappa\\ \kappa&0\end{smallmatrix}\right)$）を満たす関数 κ を γ の**曲率**とよぶ．

命題 3.1. 平面曲線の正則なパラメータ表示 $\gamma(t)$ に対して $\kappa(t)=\det\bigl(\dot\gamma(t),\ddot\gamma(t)\bigr)/|\dot\gamma(t)|^3$ で与えられる．

補題 3.2. 正則な平面曲線 γ の曲率関数は

- パラメータのとり方によらない．
- $\mathbb{R}^2$ の向きを保つ等長変換で不変である．

定理 3.3 (平面曲線の基本定理)**.** 区間 J 上で定義された C^∞-級関数 $\kappa\colon J\to\mathbb{R}$ に対して弧長でパラメータ付けられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J\to\mathbb{R}^2$ で，その曲率関数が κ となるものが存在する．さらにそのような曲線は向きを保つ等長変換を除いて一意である．

■閉曲線 平面曲線の C^∞-級パラメータ表示 $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ が周期 $L\ (>0)$ をもつ，すなわち $\gamma(t+L)=\gamma(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ を満たすとき γ を**周期 L の閉曲線**とよぶ．閉曲線 γ の**自己交叉** とは，$\gamma(t_0)=\gamma(t_1)$（$t_1-t_0\not\equiv 0 \pmod{L}$）となる t_0, t_1 の像 $\gamma(t_0)$ のこととする．自己交叉をもたない閉曲線を**単純閉曲線**という．

例 3.4.
- 半径 r の円 $\gamma(s)={}^t(r\cos(s/r), r\sin(s/r))$ は周期 $2\pi r$ の単純閉曲線である．
- レムニスケート $\gamma(t)={}^t\left(\frac{\sqrt{2}a\cos t}{1+\sin^2 t},\frac{\sqrt{2}a\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)$ は周期 2π の閉曲線である．ただし t は弧長ではない．この曲線は原点に自己交叉をもつ．
- アステロイド $\gamma(t)={}^t(a^3\cos^3 t, a^3\sin^3 t)$ は閉曲線である．ただし t は弧長ではない．また，$t\equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$ なる t に特異点をもつ．

弧長によりパラメータ付けられた周期 L の閉曲線 γ のフルネ枠 $\mathcal{F}(s)=(\boldsymbol{e}(s),\boldsymbol{n}(s))$，曲率関数 $\kappa(s)$ は周期 L をもつ．

■全曲率と回転数 弧長パラメータ表示された周期 L の閉曲線 $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ の曲率関数を $\kappa(s)$ とするとき，

$$T_\gamma:=\int_0^L\kappa(s)\,ds,\qquad i_\gamma:=\frac{1}{2\pi}T_\gamma$$

をそれぞれ γ の**全曲率**，**回転数**という．

命題 3.5. 閉曲線の回転数は整数である．

証明： 閉曲線を（適当な回転と平行移動を施して）

$$\gamma(s)=\int_0^s {}^t\bigl(\cos\theta(u),\sin\theta(u)\bigr)\,du,\qquad \theta(s):=\int_0^s\kappa(u)\,du$$

と表示する．このとき，$\boldsymbol{e}(s):=\gamma'(s)={}^t(\cos\theta(s),\sin\theta(s))$ は周期 L をもつので，$\theta(s+L)=\theta(s)+2m\pi$ (m は整数) と表される．とくに $T_\gamma=\theta(L)-\theta(0)=2m\pi$ なので，$i_\gamma=m$ となる．

2022 年 10 月 20 日 (2022 年 10 月 27 日訂正)

■閉曲線のなめらかな変形

定義 3.6. 周期 L の 2 つの正則閉曲線 $\gamma_0(t)$，$\gamma_1(t)$ が**なめらかな変形で移りあう（正則ホモトピー同値）**であるとは，C^∞-級写像 $\sigma\colon [0,1]\times\mathbb{R}\ni(\alpha,t)\to\sigma_\alpha(t)\in\mathbb{R}^2$ で次を満たすものが存在することである：

- $\alpha\in[0,1]$ を固定するとき，$\sigma_\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ は周期 L の正則閉曲線である．
- $\sigma_0(t)=\gamma_0(t)$，$\sigma_1(t)=\gamma_1(t)$ が成り立つ．

正則ホモトピー同値は正則閉曲線全体の集合の同値関係である．

命題 3.7. 2 つの正則閉曲線 γ_0, γ_1 が正則ホモトピー同値ならば，回転数は一致する．

証明： 定義 3.6 のような σ をとると，$\sigma_\alpha(t)$ の回転数は整数である．さらにこれは α の連続関数になるから，定数でなければばならない．

事実 3.8. ここでは証明を与えないが，次が成り立つ：

- 2 つの正則閉曲線の回転数が一致するならば，それらは正則ホモトピー同値である（ホイットニーの定理，テキスト 33 ページ，定理 3.3）．
- 単純閉曲線の回転数は 1 または -1 である（テキスト 31 ページ，定理 3.2）．

問題

3-1 周期 2π の閉曲線

$$\gamma_a(t)={}^t\big(\cos t,(\sin t)(a+\cos t)\big)$$

の全曲率を求めなさい．ただし a は負でない定数である．

3-2 弧長パラメータで表示された正則曲線 $\gamma\colon J\ni s\mapsto\gamma(s)\in\mathbb{R}^2$ 上の点 $\mathrm{P}:=\gamma(s_0)$ における曲率 $\kappa_0=\kappa(s_0)$ が零でないとき，十分小さい正の数 ε に対して 3 点 P, $\mathrm{Q}_\varepsilon^-:=\gamma(s_0-\varepsilon)$，$\mathrm{Q}_\varepsilon^+:=\gamma(s_0+\varepsilon)$ を通る円の中心を C_ε とおく．$s=s_0$ におけるフルネ枠を $(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{n}_0):=(\boldsymbol{e}(s_0),\boldsymbol{n}(s_0))$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}_\varepsilon^-}=p^-(\varepsilon)\boldsymbol{e}_0+q^-(\varepsilon)\boldsymbol{n}_0,\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}_\varepsilon^+}=p^+(\varepsilon)\boldsymbol{e}_0+q^+(\varepsilon)\boldsymbol{n}_0,\quad \overrightarrow{\mathrm{PC}_\varepsilon}=\alpha(\varepsilon)\boldsymbol{e}_0+\beta(\varepsilon)\boldsymbol{n}_0$$

とおくとき，

(1) $\varepsilon\to+0$ としたときの $p^\pm(\varepsilon)$，$q^\pm(\varepsilon)$，$\dot p^\pm(\varepsilon)$，$\dot q^\pm(\varepsilon)$，$\ddot p^\pm(\varepsilon)$，$\ddot q^\pm(\varepsilon)$ の極限値をそれぞれ求めなさい．ただし $\dot{}=d/d\varepsilon$．

(2) $\varepsilon\to+0$ としたときの $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ の極限値を求めなさい．