幾何学概論第一 (MTH.B211)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/10/27

おしらせ

- 43 名から課題の提出がありました．受講登録者 53 名．
- 答案および評点は T2SCHOLA よりフィードバック中．答案にかかれた文字は山田個人のメモです．講義資料にあるものをご利用ください．
- 来週 11 月 3 日は文化の日（休日）のため，次回は 11 月 10 日になります．

訂正：

- 問題 3-1 の曲線の第 2 座標：
  $\sin t(a+\cos t) \Rightarrow (a+\cos t)\sin t$ または $(\sin t)(a+\cos t)$
- 黒板 C の課題提出締め切りが 2021 年になっていました．
- 黒板 C・映写資料 C 7 ページ：$(\alpha, t) \to \sigma_\alpha(t) \Rightarrow (\alpha, t) \mapsto \sigma_\alpha(t)$

意見・要望など

- 漢字の誤りなど，わざわざ授業で取り上げないでほしい．そんな時間があるなら板書をめくるスピードを落としてほしい．黒板と異なり，次から次へと前に書いたものが消えていっているということを意識してほしい．

  山田のコメント：漢字の誤りは目に余るものが何回も出てくるのが通例ですので，出てこなくなったらやめます．
  板書については「だから黒板を公開しています」．実際の黒板を用いて，コピーの公開をやめることもできます．みなさまのご意見次第です．

- 講義資料・映写資料のアップロードをもう少し早めにしてほしいです．

  山田のコメント：申し訳ありません．善処します．

意見・要望など

- 命題 3.7 の証明で $\mathbb{Z}$ のとびとびさ（ぎっしりでない）を使うのが面白いです．また，直感的な回転数と i_γ が一致することも不思議で面白いです．

  山田のコメント：「とびとびさ」は「離散性」といいます．

- 段々とついていけなくなってきて自分の力不足を感じる日々です．
  山田のコメント：当方の力の問題（力づくでわからせる？）

- 力こそパワー
  山田のコメント：は？

質問から

弧長

Q: 弧長で表示されていない曲線の全曲率

A: $\gamma(t)$: 正則曲線， $s = s(t)$：弧長パラメータ $\Rightarrow$

general

$\gamma(t)$

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right|} \quad \text{i.e.,} \quad ds = |\dot{\gamma}|\,dt$$

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^3}$$

$$\int \kappa(s)\,ds$$

parameter 変換

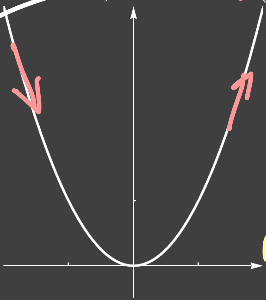
$$\kappa(t)\,\cancel{dt}\,ds \quad |\dot{\gamma}|\,dt$$

$$\int \kappa(t)\frac{ds}{dt}\,dt = \int \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^2}\,dt$$

質問から

Q: 閉曲線でない曲線の全曲率

e.g.: 放物線 $\gamma\colon \mathbb{R} \ni t \mapsto {}^t(t, t^2) \in \mathbb{R}^2$



$$\frac{d\gamma}{ds} = \theta = (\cos\theta \ \sin\theta)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa \quad \kappa$$

$$\int \kappa(t)\, \cancel{dt}\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+4t^2}\, dt$$

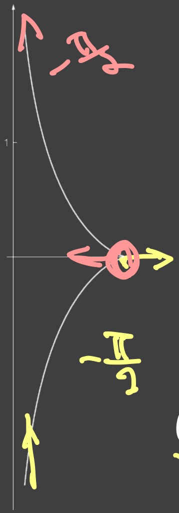
進行方向の変化の総和 $= \pi$

質問から

Q: 特異点をもつ曲線の全曲率

e.g.: トラクトリクス $\gamma\colon \mathbb{R} \ni t \mapsto {}^t(\operatorname{sech} t, t - \tanh t) \in \mathbb{R}^2$

$-\pi$



$$\int \kappa(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh t}$$

$$\dot\gamma = \tanh t \,(-\operatorname{sech} t,\ \tanh t)$$

$$\ddot\gamma = \operatorname{th} t \,((-\operatorname{sech} t)',\ (\tanh t)')$$

$$\frac{\det(\dot\gamma, \ddot\gamma)}{|\dot\gamma|^2}\,dt \quad (\bmod\ \dot\gamma)$$

質問から

Q: 正則ホモトピー同値

回転数

巴が円周をどう巻くか

Def: 周期 L の 2 つの正則閉曲線 $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ が
正則ホモトピー同値
$\Leftrightarrow \exists \sigma : [0,1] \times \mathbb{R} \ni (\alpha, t) \mapsto \sigma_\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ (C^∞) :

- $\sigma_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は周期 L の$\boxed{\text{正則}}$閉曲線 $(\alpha \in [0,1])$
- $\sigma_0(t) = \gamma_0(t)$, $\sigma_1(t) = \gamma_1(t)$

$[0\text{-}1]$

写像の矢印
写→
\mapsto

$\sigma : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
\to

直積

$\boxed{\dfrac{d\sigma_\alpha}{dt} \neq 0}$

$A \times B = \{(\alpha, \beta) ; \alpha \in A, \beta \in B\}$

e.g. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

質問から

Q: 正則ホモトピー同値

Def: 周期 L の 2 つの正則閉曲線 $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ が
<u>正則ホモトピー同値</u>
$\Leftrightarrow \exists\sigma\colon [0,1]\times\mathbb{R}\ni(\alpha,t)\mapsto\sigma_\alpha(t)\in\mathbb{R}^2$ (C^∞) :

- $\sigma_\alpha\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ は周期 L の正則閉曲線 $(\alpha\in[0,1])$
- $\sigma_0(t)=\gamma_0(t)$, $\sigma_1(t)=\gamma_1(t)$.

質問から

Q: 命題 3.5 は空間曲線でも成り立つように思いますが，たとえば事実 3.8 は成り立ちそうに思えません．3 次元以上で閉曲線を考えたときにも，事実 3.8 における回転数のように，強力な性質を成り立たせる不変量はありますか．

質問から

Q: 教科書（山田注：30 ページ）の図で，閉曲線の連続的変化を表すものがありました．この場合，速度ベクトルが消える点 1 つに対して，新たに 1 つ回転数が増えていますが，速度ベクトルが消える点が 2 つ以上回転数が増えるということはありますか．

補足：曲線の大域的性質

大域的性質の例：

- 閉曲線であること．
- 回転数
- 単純閉曲線であること
- 4 頂点定理（テキスト 25 ページ，定理 2.10；45 ページ，定理 4.4）

κ：極値

単純閉 → ∃4頂点

局所的性質の例：

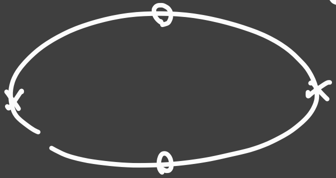
- 弧長パラメータ（で微分すること）
- 曲率

Lemniscate

2頂点

→ ∃自己交差

ellipse



講義

この後，短い休憩をとり，2 つの「講義」を行います．

3　前回の復習

4　曲率円