

幾何学概論第一 (MTH.B211)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/>

東京工業大学理学院数学系

2022/10/27

お知らせ

- ▶ 43名から課題の提出がありました。受講登録者53名。
- ▶ 答案および評点はT2SCHOLAよりフィードバック中。答案にかかれた文字は山田個人のメモです。講義資料にあるものをご利用ください。
- ▶ 来週11月3日は文化の日（休日）のため、次回は11月10日になります。

訂正：

- ▶ 問題3-1の曲線の第2座標：
 $\sin t(a + \cos t) \Rightarrow (a + \cos t) \sin t$ または $(\sin t)(a + \cos t)$
- ▶ 黒板Cの課題提出締め切りが2021年になっていました。
- ▶ 黒板C・映写資料C7ページ： $(\alpha, t) \rightarrow \sigma_\alpha(t) \Rightarrow (\alpha, t) \mapsto \sigma_\alpha(t)$

意見・要望など

- ▶ 漢字の誤りなど，わざわざ授業で取り上げないでほしい。そんな時間があるなら板書をめくるスピードを落としてほしい。黒板と異なり，次から次へと前に書いたものが消えていっているということ意識してほしい。

山田のコメント：漢字の誤りは目に余るものが何回も出てくるのが通例ですので，出てこなくなったらやめます。

板書については「だから黒板を公開しています」。実際の黒板を用いて，コピーの公開をやめることもできます。みなさまのご意見次第です。

- ▶ 講義資料・映写資料のアップロードをもう少し早めにしてほしいです。

山田のコメント：申し訳ありません。善処します。

意見・要望など

- ▶ 命題 3.7 の証明で \mathbb{Z} のとびとびさ（ぎっしりでない）を使うのが面白いです。また，直感的な回転数と i_γ が一致することも不思議で面白いです。

山田のコメント：「とびとびさ」は「離散性」といいます。

- ▶ 段々についていけなくなってきた自分の力不足を感じる日々です。

山田のコメント：当方の力の問題（力づくでわからせる？）

- ▶ 力こそパワー

山田のコメント：は？

質問から

Q: 弧長で表示されていない曲線の全曲率

A: $\gamma(t)$: 正則曲線, $s = s(t)$: 弧長パラメータ \Rightarrow

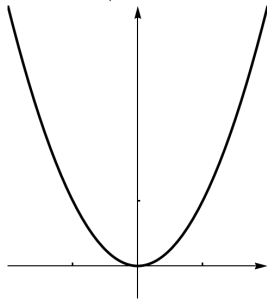
$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| \quad \text{i.e.,} \quad ds = |\dot{\gamma}| dt$$

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|^3}$$

質問から

Q: 閉曲線でない曲線の全曲率

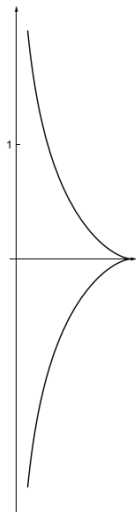
e.g.: 放物線 $\gamma: \mathbb{R} \ni t \mapsto {}^t(t, t^2) \in \mathbb{R}^2$



質問から

Q: 特異点をもつ曲線の全曲率

e.g.: トラクトリクス $\gamma: \mathbb{R} \ni t \mapsto {}^t(\operatorname{sech} t, t - \tanh t) \in \mathbb{R}^2$



質問から

Q: 正則ホモトピー同値

Def: 周期 L の2つの正則閉曲線 $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ が
正則ホモトピー同値

$\Leftrightarrow \exists \sigma: [0, 1] \times \mathbb{R} \ni (\alpha, t) \mapsto \sigma_\alpha(t) \in \mathbb{R}^2 (C^\infty) :$

- ▶ $\sigma_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は周期 L の正則閉曲線 ($\alpha \in [0, 1]$)
- ▶ $\sigma_0(t) = \gamma_0(t)$, $\sigma_1(t) = \gamma_1(t)$.

質問から

Q: 正則ホモトピー同値

Def: 周期 L の2つの正則閉曲線 $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ が
正則ホモトピー同値

$\Leftrightarrow \exists \sigma: [0, 1] \times \mathbb{R} \ni (\alpha, t) \mapsto \sigma_\alpha(t) \in \mathbb{R}^2 (C^\infty)$:

- ▶ $\sigma_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は周期 L の正則閉曲線 ($\alpha \in [0, 1]$)
- ▶ $\sigma_0(t) = \gamma_0(t)$, $\sigma_1(t) = \gamma_1(t)$.

質問から

Q: 命題 3.5 は空間曲線でも成り立つように思いますが, たとえば事実 3.8 は成り立ちそうに思えません. 3次元以上で閉曲線を考えたときにも, 事実 3.8 における回転数のように, 強力な性質を成り立たせる不変量はありますか.

質問から

Q: 教科書（山田注：30 ページ）の図で，閉曲線の連続的变化を表すものがありました．この場合，速度ベクトルが消える点1つに対して，新たに1つ回転数が増えています，速度ベクトルが消える点が2つ以上回転数が増えるということはありませんか．

補足：曲線の大域的性質

大域的性質の例：

- ▶ 閉曲線であること.
- ▶ 回転数
- ▶ 単純閉曲線であること
- ▶ 4 頂点定理 (テキスト 25 ページ, 定理 2.10 ; 45 ページ, 定理 4.4)

局所的性質の例：

- ▶ 弧長パラメータ (で微分すること)
- ▶ 曲率