幾何学概論第一 (MTH.B211)

曲率円

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

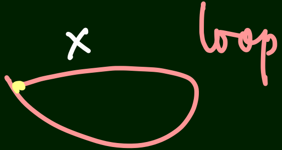
東京工業大学理学院数学系

2022/10/27

復習：閉曲線の回転数

閉曲線：

- $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$：$C^\infty$-級
- γ が周期 L（> 0）を持つ



全曲率・回転数：s を弧長とするとき

$$全曲率 = T_\gamma := \int_0^L \kappa(s)\,ds, \qquad 回転数 = i_\gamma := \frac{1}{2\pi} T_\gamma \in \mathbb{Z}$$

命題

2 つの正則閉曲線 γ_0, γ_1 が正則ホモトピー同値ならば，回転数は一致する．

問題 3-1

問題

周期 2π の閉曲線

変形のパラメータ

$$\gamma_a(t) = {}^t\bigl(\cos t, (\sin t)(a + \cos t)\bigr)$$

$a \geqq 0$

の全曲率を求めなさい．ただし a は負でない定数である．

うごく

$$\dot\gamma_a(t) = {}^t(-\sin t, a\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t)$$

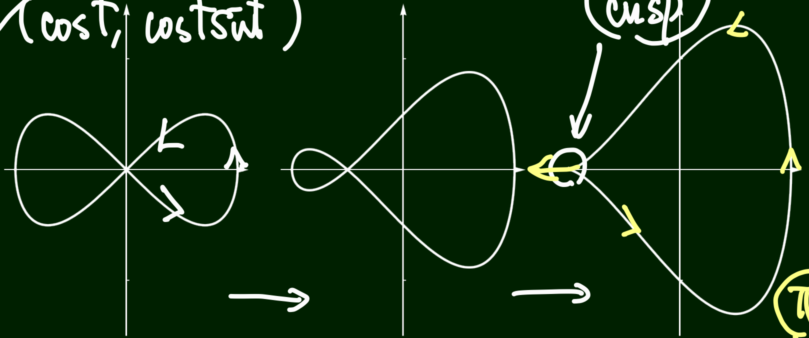
$$\dot\gamma_a = 0 \iff \begin{pmatrix} a = 1, \\ t = \pi \end{pmatrix}$$

やばい

問題 3-1 $(a \in [0,1))$

$(\cos t, \cos t \sin t)$

cusp



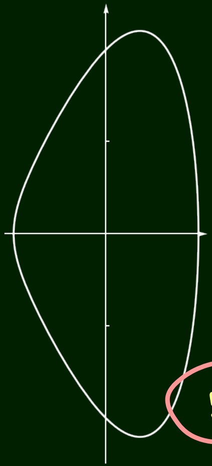
$a = 0$ $a = 0.5$ $a = 1$

γ_a : γ_0 と正則ホモトピー同値.

$T_{\gamma_a} = T_{\gamma_0} = 0$

$2\int_{\cancel{-\pi}\,0}^{\pi}$ $t \to \frac{\pi}{2} - u$

問題 3-1 ($a \in (1, \infty)$)



$a = 2$

2π

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ (\sin t)(a+\cos t) \end{pmatrix}$$ 同値

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \left(1 + \overset{b}{\cancel{\tfrac{1}{a}}} \cos t\right) \end{pmatrix}$$

$b \to 0$

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

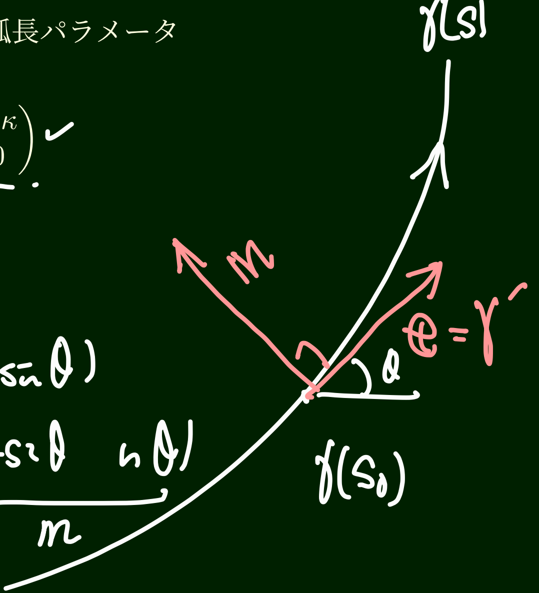
- $\gamma(s)$：正則曲線, s：弧長パラメータ
- $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$：フルネ枠 $\in SO(2)$
- $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega$, $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$ ✓
- $\boldsymbol{e}' = \kappa \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}' = -\kappa \boldsymbol{e}$

Frenet.

$$e = {}^t(\cos\theta \quad \sin\theta)$$

$$e' = \theta' \, {}^t\underbrace{(-\sin\theta \quad \cos\theta)}_{n}$$

κ



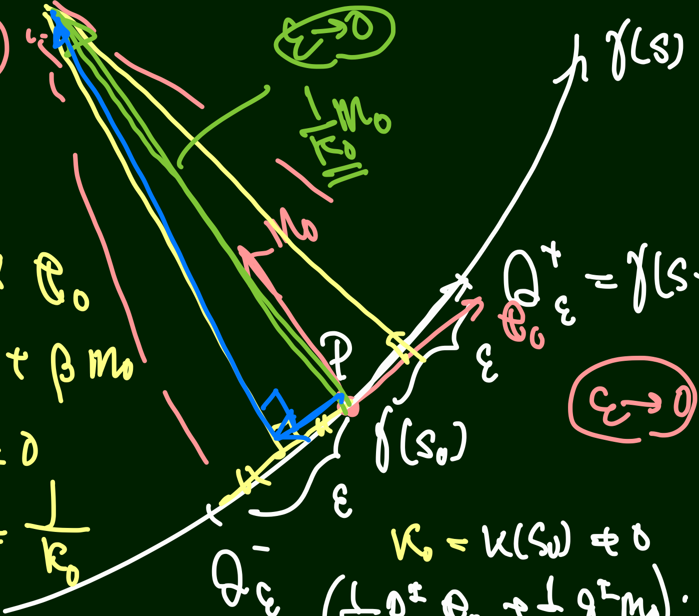
問題

$\gamma\colon J \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ (s：弧長)
$\mathrm{P} := \gamma(s_0)$ における曲率 $\kappa_0 = \kappa(s_0) \neq 0$ のとき,
十分小さい正の数 ε に対して 3 点 P, $\mathrm{Q}_\varepsilon^- := \gamma(s_0 - \varepsilon)$,
$\mathrm{Q}_\varepsilon^+ := \gamma(s_0 + \varepsilon)$ を通る円の中心を C_ε とおく． $s = s_0$ におけるフルネ枠を $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{n}_0) := (\boldsymbol{e}(s_0), \boldsymbol{n}(s_0))$ として,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}_\varepsilon^-} = p^-(\varepsilon)\boldsymbol{e}_0 + q^-(\varepsilon)\boldsymbol{n}_0, \qquad \overrightarrow{\mathrm{PQ}_\varepsilon^+} = p^+(\varepsilon)\boldsymbol{e}_0 + q^+(\varepsilon)\boldsymbol{n}_0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PC}_\varepsilon} = \alpha(\varepsilon)\boldsymbol{e}_0 + \beta(\varepsilon)\boldsymbol{n}_0$$

とおくとき, ($\dot{} = d/d\varepsilon$)

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \begin{pmatrix} p^\pm(\varepsilon) & q^\pm(\varepsilon) \\ \dot{p}^\pm(\varepsilon) & \dot{q}^\pm(\varepsilon) \\ \ddot{p}^\pm(\varepsilon) & \ddot{q}^\pm(\varepsilon) \\ \alpha(\varepsilon) & \beta(\varepsilon) \end{pmatrix}$$



$\overrightarrow{PC_\varepsilon} = \alpha\, e_0$

$+ \beta\, n_0$

$\alpha(0) = 0$

$\beta(0) = \frac{1}{\kappa_0}$

$\kappa_0 = \kappa(s_0) \neq 0$

Q_ε^-

$0 = \left(\frac{1}{2}p^2 e_0 + \frac{1}{2}q^2 n_0\right) \cdot$

$\cdot \left('' - \alpha e_0 - \beta n_0 \right)$

$\mathbb{R}^2$の基底

$$\overrightarrow{PQ_\varepsilon^{\pm}} = p^{\pm}(\varepsilon)e_0 + q^{\pm}(\varepsilon)n_0$$

$$= \gamma(s_0 \pm \varepsilon) - \gamma(s_0) = 0$$

$\varepsilon \to 0$

$$p^{\pm}(0) = q^{\pm}(0) = 0$$

$\left.\dfrac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon \to 0}$

$$\dot{p}^{\pm}(0)e_0 + \dot{q}^{\pm}(0)n_0 = \pm e_0 = \pm\dot{\gamma}(s_0)$$

$1 \qquad 0$

~ 1

$\dfrac{d}{d\varepsilon}$

$$\ddot{p}^{\pm}(0) = 0 \qquad \kappa n_0 = \ddot{\gamma}(s_0)$$

$$\ddot{q}^{\pm}(0) = \kappa(0)$$