幾何学概論第一 (MTH.B211)

曲率円

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/10/27

復習：閉曲線の回転数

閉曲線：

- $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$：$C^\infty$-級
- γ が周期 L（> 0）を持つ

全曲率・回転数：s を弧長とするとき

$$\text{全曲率} = T_\gamma := \int_0^L \kappa(s)\,ds, \qquad \text{回転数} = i_\gamma := \frac{1}{2\pi} T_\gamma \in \mathbb{Z}$$

命題

2 つの正則閉曲線 γ_0, γ_1 が正則ホモトピー同値ならば，回転数は一致する．

問題 3-1

問題

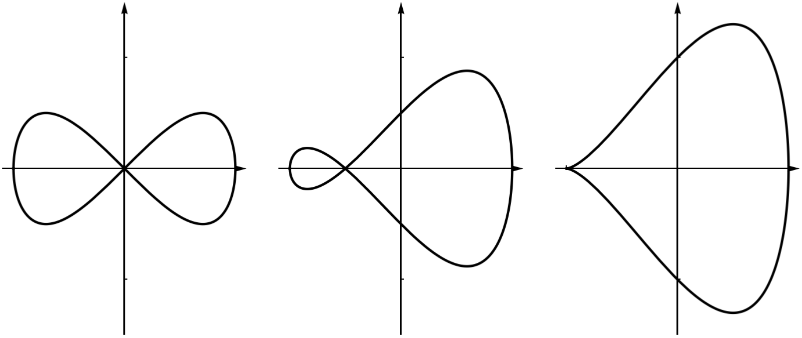
周期 2π の閉曲線

$$\gamma_a(t) = {}^t\big(\cos t, (\sin t)(a + \cos t)\big)$$

の全曲率を求めなさい．ただし a は負でない定数である．

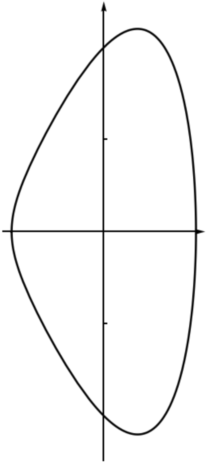
$$\dot{\gamma}_a(t) = {}^t(-\sin t, a\cos t + \cos^2 t - \sin^2 t)$$

問題 3-1 ($a \in [0, 1)$)



$a = 0$ $a = 0.5$ $a = 1$

問題 3-1 ($a \in (1, \infty)$)



$a = 2$

復習：フルネ枠

- $\gamma(s)$：正則曲線，s：弧長パラメータ
- $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$：フルネ枠
- $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega$, $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{e}' = \kappa \boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}' = -\kappa \boldsymbol{e}$

問題 3-2

問題

$\gamma\colon J \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ (s：弧長)
$\mathrm{P} := \gamma(s_0)$ における曲率 $\kappa_0 = \kappa(s_0) \neq 0$ のとき，
十分小さい正の数 ε に対して 3 点 P, $\mathrm{Q}_\varepsilon^- := \gamma(s_0 - \varepsilon)$,
$\mathrm{Q}_\varepsilon^+ := \gamma(s_0 + \varepsilon)$ を通る円の中心を C_ε とおく．$s = s_0$ におけるフルネ枠を $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{n}_0) := (\boldsymbol{e}(s_0), \boldsymbol{n}(s_0))$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}_\varepsilon^-} = p^-(\varepsilon)\boldsymbol{e}_0 + q^-(\varepsilon)\boldsymbol{n}_0, \qquad \overrightarrow{\mathrm{PQ}_\varepsilon^+} = p^+(\varepsilon)\boldsymbol{e}_0 + q^+(\varepsilon)\boldsymbol{n}_0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PC}_\varepsilon} = \alpha(\varepsilon)\boldsymbol{e}_0 + \beta(\varepsilon)\boldsymbol{n}_0$$

とおくとき，($\dot{} = d/d\varepsilon$)

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \begin{pmatrix} p^\pm(\varepsilon) & q^\pm(\varepsilon) \\ \dot{p}^\pm(\varepsilon) & \dot{q}^\pm(\varepsilon) \\ \ddot{p}^\pm(\varepsilon) & \ddot{q}^\pm(\varepsilon) \\ \alpha(\varepsilon) & \beta(\varepsilon) \end{pmatrix}$$