

幾何学概論第一 (MTH.B211)

曲率円

山田光太郎

`kotaro@math.titech.ac.jp`

`http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/`

東京工業大学理学院数学系

2022/10/27

曲率円

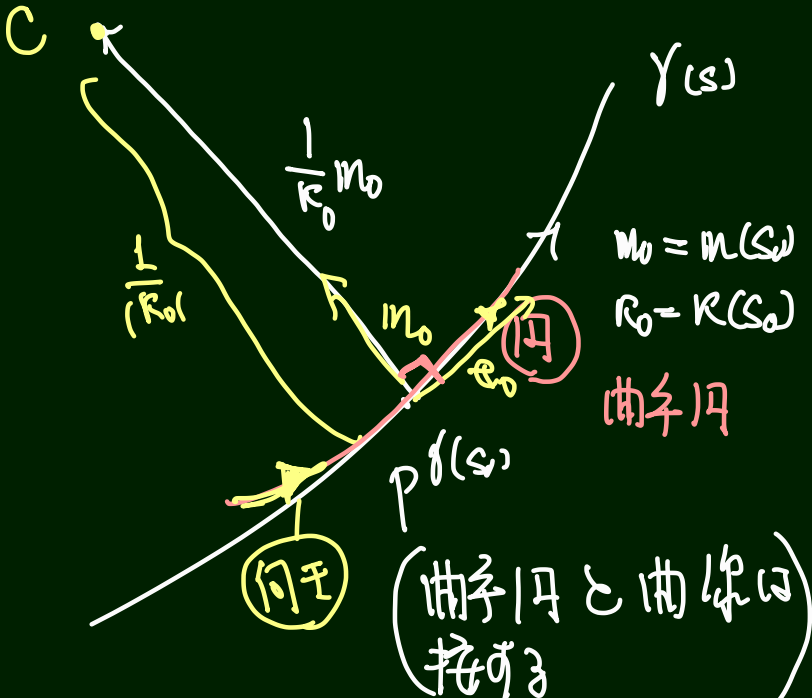
正則平面曲線 $\gamma(t)$ の $P := \gamma(t_0)$ における曲率を $\kappa(t_0)$, 左向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}(t_0)$ と書く.

定義

上の状況で,

- ▶ $\kappa(t_0) \neq 0$ のとき $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{\kappa(t_0)} \mathbf{n}(t_0)$ となる点 C を中心とした半径 $1/|\kappa(t_0)|$ の円で P における進行方向が γ と一致するような円 C_P を γ の $P = \gamma(t_0)$ における曲率円, その半径を曲率半径という.
- ▶ $\kappa(t_0) = 0$ のとき, γ の $P = \gamma(t_0)$ における接線で接点 P における進行方向が γ のそれと一致するものを t_0 における γ の曲率円 という.

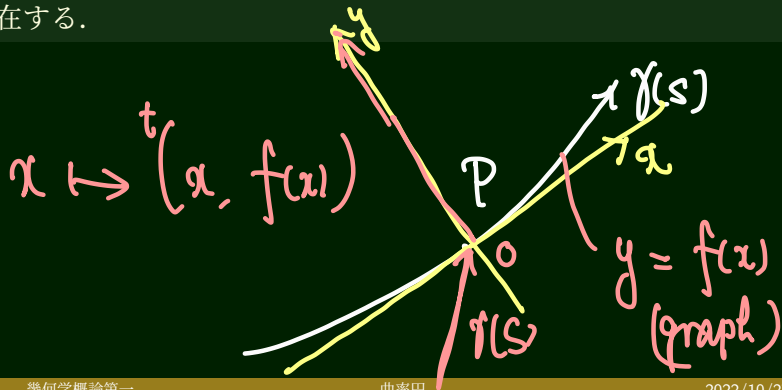
曲率円は曲線に「もっともよく接する円」



$\gamma(t)$: 正則平面曲線, $P = \gamma(t_0)$.

補題

上の状況で \mathbb{R}^2 の向きを保つ合同変換 F で, $\tilde{\gamma} := F \circ \gamma$ で $\tilde{\gamma}(t_0) = {}^t(0,0)$, 進行方向の単位接ベクトル, 左向き単位法線ベクトルがそれぞれ $\tilde{e}(t_0) = {}^t(1,0)$, $\tilde{n}(t_0) = {}^t(0,1)$ を満たすものが存在する.



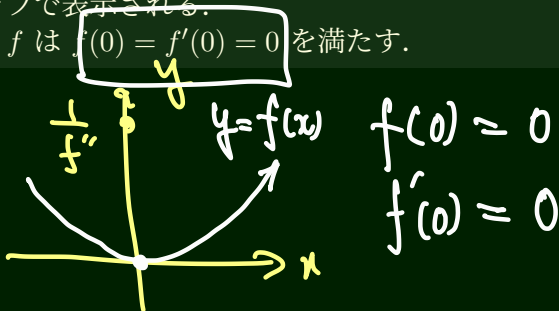
グラフ表示

$\gamma(t)$: 正則平面曲線, $P = \gamma(t_0) = {}^t(0, 0)$;
 $e(t_0) = {}^t(1, 0)$, $n(t_0) = {}^t(0, 1)$.

補題

上の状況で, 0 を含む开区間 J' , t_0 を含む开区間 J とパラメータ変換 $\varphi: J' \ni x \mapsto t = \varphi(x) \in J$ および C^∞ -級関数 $f: J' \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $\gamma \circ \varphi(x) = {}^t(x, f(x))$ とかける. すなわち γ は C^∞ -級関数 f のグラフで表示される.

さらにこの関数 f は $f(0) = f'(0) = 0$ を満たす.



グラフ表示における曲率円

グラフ表示された曲線 $x \mapsto {}^t(x, f(x))$ ($f(0) = f'(0) = 0$) の

- ▶ 原点における曲率 = $f''(0)$
- ▶ 原点における曲率円の中心: $\left(0, \frac{1}{f''(0)}\right)$.
- ▶ 曲率円の原点の近くにおけるグラフ表示:

以後: $(1 f)$

$$K(x) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f' & f'' \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + f'^2}^3}$$

$$= \frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}^3}$$

右の方が < 近似

曲率円と
曲線の接点

2次の接触がある

2次の接触

$\gamma(t), \sigma(u)$: 平面正則曲線

- ▶ $\gamma(t_0) = \sigma(u_0) =: P$
- ▶ $\dot{\gamma}(t_0)$ と $\dot{\sigma}(u_0)$ は同じ方向を向く (P で 1 次の接触をする)

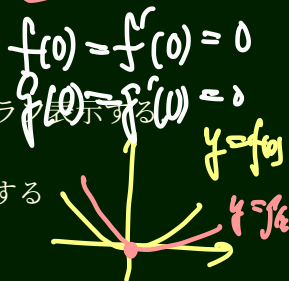
回転と平行移動により

- ▶ $P = O$
- ▶ $\dot{\gamma}(t_0)$ と $\dot{\sigma}(u_0)$ は x 軸の正の向き
- ▶ γ, σ をそれぞれ ${}^t(x, f(x)), {}^t(x, g(x))$ とグラフ表示する

この状況で

- ▶ γ, σ が $P = \gamma(t_0) = \sigma(u_0)$ で 2 次の接触をする

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 f}{dx^2}(0) = \frac{d^2 g}{dx^2}(0)$$



命題

平面曲線 $\gamma(t)$ の点 $P = \gamma(t_0)$ における 曲率円 は P において γ と 2 次の接触をする。

曲率円と2次の接触

$$\underline{\gamma(x) = {}^t(x, f(x))}, \quad \underline{\sigma(x) = {}^t(x, g(x))}$$

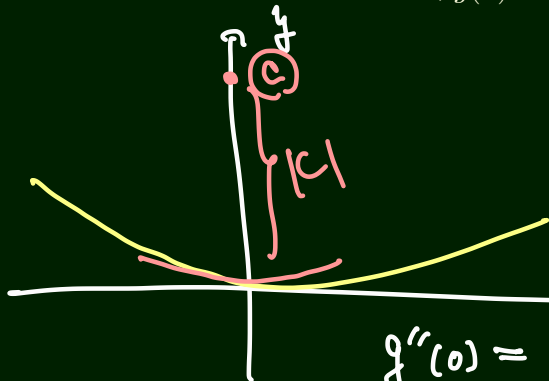
▶ $f(0) = f'(0) = g(0) = g'(0) = 0$

▶ σ は原点で x 軸に接する円 i.e., $g(x) = c - c\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}$.

$$x^2 + (y - c)^2 = c^2$$

$$y = c - c\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}$$

$$g(0) = 0$$



$$y = f(x)$$

$$g''(0) = \frac{1}{c} = f''(0)$$

縮閉線 evolutes

$\gamma(s)$: 正則曲線 ; $\mathbf{n}(s)$: 左向き単位法線ベクトル $\kappa(s)$: 曲率関数 ($\neq 0$)

γ の縮閉線 evolute :

$$\sigma(s) := \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s)$$

曲率円の中心

σの
(s:弧長)

補題

縮閉線の特異点は $\kappa'(s) = 0$ となる s に対応する点である。

$$\begin{aligned} \sigma'(s) &= \cancel{\gamma'(s)} - \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} \mathbf{m} + \frac{1}{\cancel{\kappa}} \cancel{\mathbf{n}'} \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \kappa' \mathbf{m}(s) \end{aligned}$$

問題 4-1

問題

弧長でパラメータづけられた平面曲線 $\gamma: \mathbb{R} \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ の曲率関数が $\kappa(s) = \frac{1}{s}$ であるとき、

1. γ の制限 $\gamma|_{(0, +\infty)}$ の縮閉線 $\sigma(s)$ に対して $\lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma(s)$ が存在することを示しなさい。┆
2. $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s)$ が存在することを示しなさい。

clothoid

問題 4-2

問題

弧長 s でパラメータ表示された空間曲線 $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($J \subset \mathbb{R}$ は区間) の像が \mathbb{R}^3 の原点を中心とする半径 $1/a$ ($a > 0$) の球面上に含まれているとする. このとき, $|\gamma''| \geq a$ であることを示しなさい. (ヒント: $|\gamma'| = 1/a$ であることと, シュワルツの不等式.) ✓

本日の課題の提出締切は

2022年10月31日（月曜日）07:00 JST