幾何学概論第一 (MTH.B211)

曲率円

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/10/27

曲率円

正則平面曲線 $\gamma(t)$ の $\mathrm{P} := \gamma(t_0)$ における曲率を $\kappa(t_0)$，左向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(t_0)$ と書く.

定義

上の状況で，

- $\kappa(t_0) \neq 0$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \frac{1}{\kappa(t_0)}\boldsymbol{n}(t_0)$ となる点 C を中心とした半径 $1/|\kappa(t_0)|$ の円で P における進行方向が γ と一致するような円 C_{P} を γ の $\mathrm{P} = \gamma(t_0)$ における曲率円，その半径を曲率半径という.
- $\kappa(t_0) = 0$ のとき，γ の $\mathrm{P} = \gamma(t_0)$ における接線で接点 P における進行方向が γ のそれと一致するものを t_0 における γ の曲率円 という.

曲率円は曲線に「もっともよく接する円」

グラフ表示

$\gamma(t)$：正則平面曲線，$\mathrm{P} = \gamma(t_0)$.

補題

上の状況で $\mathbb{R}^2$ の向きを保つ合同変換 F で，$\tilde{\gamma} := F \circ \gamma$ で $\tilde{\gamma}(t_0) = {}^t(0,0)$，進行方向の単位接ベクトル，左向き単位法線ベクトルがそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{e}}(t_0) = {}^t(1,0)$, $\tilde{\boldsymbol{n}}(t_0) = {}^t(0,1)$ を満たすものが存在する.

グラフ表示

$\gamma(t)$：正則平面曲線，$\mathrm{P} = \gamma(t_0) = {}^t(0,0)$；
$\boldsymbol{e}(t_0) = {}^t(1,0)$，$\boldsymbol{n}(t_0) = {}^t(0,1)$.

補題

上の状況で，0 を含む開区間 J'，t_0 を含む開区間 J とパラメータ変換 $\varphi\colon J' \ni x \mapsto t = \varphi(x) \in J$ および C^∞-級関数 $f\colon J' \to \mathbb{R}$ が存在して $\gamma \circ \varphi(x) = {}^t\big(x, f(x)\big)$ とかける．すなわち γ は C^∞-級関数 f のグラフで表示される．
さらにこの関数 f は $f(0) = f'(0) = 0$ を満たす．

グラフ表示における曲率円

グラフ表示された曲線 $x \mapsto {}^t(x, f(x))$（$f(0) = f'(0) = 0$）の

- 原点における曲率 $= f''(0)$
- 原点における曲率円の中心：${}^t\left(0, \dfrac{1}{f''(0)}\right)$.
- 曲率円の原点の近くにおけるグラフ表示：

2 次の接触

$\gamma(t)$, $\sigma(u)$：平面正則曲線

- $\gamma(t_0) = \sigma(u_0) =: \mathrm{P}$
- $\dot{\gamma}(t_0)$ と $\dot{\sigma}(u_0)$ は同じ方向を向く（P で 1 次の接触をする）

回転と平行移動により

- $\mathrm{P} = \mathrm{O}$
- $\dot{\gamma}(t_0)$ と $\dot{\sigma}(u_0)$ は x 軸の正の向き
- γ, σ をそれぞれ ${}^t(x, f(x))$, ${}^t(x, g(x))$ とグラフ表示する.

この状況で

- γ, σ が $\mathrm{P} = \gamma(t_0) = \sigma(u_0)$ で2 次の接触をする
  $\Leftrightarrow \dfrac{d^2 f}{dx^2}(0) = \dfrac{d^2 g}{dx^2}(0)$

命題

平面曲線 $\gamma(t)$ の点 $\mathrm{P} = \gamma(t_0)$ における曲率円は P において γ と 2 次の接触をする.

曲率円と 2 次の接触

$\gamma(x) = {}^t(x, f(x))$, $\sigma(x) = {}^t(x, g(x))$

- $f(0) = f'(0) = g(0) = g'(0) = 0$
- σ は原点で x 軸に接する円 i.e., $g(x) = c - c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}}$.

縮閉線 evolutes

$\gamma(s)$：正則曲線；$\boldsymbol{n}(s)$：左向き単位法線ベクトル $\kappa(s)$：曲率関数 $(\neq 0)$
γ の縮閉線 evolute：

$$\sigma(s) := \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{n}(s)$$

補題

縮閉線の特異点は $\kappa'(s) = 0$ となる s に対応する点である.

問題 4-1

問題

弧長でパラメータづけられた平面曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ の曲率関数が $\kappa(s) = s$ であるとき,

1. γ の制限 $\gamma|_{(0,+\infty)}$ の縮閉線 $\sigma(s)$ に対して $\lim_{s\to+\infty} \sigma(s)$ が存在することを示しなさい.
2. $\lim_{s\to+\infty} \gamma(s)$ が存在することを示しなさい.

問題 4-2

問題

弧長 s でパラメータ表示された空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ ($J \subset \mathbb{R}$ は区間) の像が $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 $1/a$ ($a > 0$) の球面上に含まれているとする．このとき，$|\gamma''| \geqq a$ であることを示しなさい．（ヒント：$|\gamma| = 1/a$ であることと，シュワルツの不等式.）