

2022年10月27日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 4

■お知らせ

- 43件/登録者53名の課題提出がありました。フィードバックはT2SCHOLA.
- 来週11月3日は文化の日(休日)のため、今回は11月10日になります。

■前回の補足

- 複素関数論で習う複素平面上的閉曲線 γ の回転数 $n(z, \gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z}$ と前回扱った平面閉曲線の回転数 i_{γ} についての質問を複数いただきました。 $n(z, \gamma)$ は、まつわり数 winding number とよばれ、平面上の点 z の周りを曲線 γ がどれくらい回るか、すなわち、 z を始点とする $\gamma(t)$ の位置ベクトル $z\gamma(t)$ が何回まわるかを表しており、曲線 γ の他に点 z に依存します。たとえば γ を円としたとき、 z が円の内部にあれば $n(z, \gamma) = 1$ 、外部にあると 0 になりますね。前回扱った回転数 i_{γ} (rotation index) は曲線の接ベクトルが何回まわるかを表す量で、曲線のみから決まります。
- 閉曲線でない曲線、特異点をもつ曲線に対して全曲率・回転数が定義されるか、というご質問が複数ありました。定義域全体に渡って曲率を弧長に関して積分すれば全曲率は定義できます。弧長や曲率が定義できない特異点があってもそれが離散的なら、正則な区間で広義積分を行うことで全曲率が得られます。たとえば (1) 放物線 $\mathbb{R} \ni t \mapsto {}^t(t, t^2) \in \mathbb{R}^2$ の全曲率は π 、(2) トラクトリクス $\mathbb{R} \ni t \mapsto {}^t(\operatorname{sech} t, t - \tanh t) \in \mathbb{R}^2$ の全曲率は $-\pi$ (3) アステロイド (周期 2π) ${}^t(\cos^3 t, \sin^3 t)$ の全曲率は -2π (計算してくださった方がありました)。

■前回までの訂正

- 問題 3-1 の曲線の第 2 座標: $\sin t(a + \cos t) \Rightarrow (a + \cos t) \sin t$ または $(\sin t)(a + \cos t)$
- 黒板 C の課題提出締め切りが 2021 年になっていました。
- 黒板 C ・ 映写資料 C 7 ページ: $(\alpha, t) \rightarrow \sigma_{\alpha}(t) \Rightarrow (\alpha, t) \rightarrow \sigma_{\alpha}(t)$

■授業に関する御意見

- 漢字の誤りなど、わざわざ授業で取り上げないでほしい。そんな時間があるなら板書をめくるスピードを落としてほしい。黒板と異なり、次から次へと前に書いたものが消えていっているということを意識してほしい。 **山田のコメント:** 漢字の誤りは目に余るものが何回も出てくるのが通例ですので、出てこなくなったらやめます。板書については「だから黒板を公開しています」。実際の黒板を用いて、コピーの公開をやめることもできます。みなさまのご意見次第です。
- 講義資料・映写資料のアップロードをもう少し早めにしてほしいです。 **山田のコメント:** 申し訳ありません。善処します。
- 試験の教室について言及して頂いてありがとうございました。履修登録者があと数人増えるといいんですが...
山田のコメント: もう締め切ったからどうでしょうね。追加登録があるか?
- この授業では他の数学の授業と比べて日本語表記が少ないように感じます。図形の名前や数学の用語が英語などで出てきたときに、すぐに理解できるようになっていきたいです。 **山田のコメント:** なるべく日本語(原語併記)にしているつもりですが。
- 問題 3.2 もやってみました。教科書でさらっと出てくるような事実をあえて地道なやり方で導いてみるのも面白いものだと思います。 **山田のコメント:** 数学の教科書を読むときは本来そうしなければなりませんね。
- 物理学系では特殊関数は結構幅広く(犬井鉄郎「特殊関数」を軽くさらうぐらい)習うのですが、数学系の方は特殊関数というものをごどれくらいまで習うのが一般的なのでしょうか。 **山田のコメント:** 一般的にはほとんど習わない。使うときになって色々調べるのが普通だと思います(犬井の本だと詳しくはさげない)。
- 正則ホモトピー同値の際の「滑らかな変形で移り合う」という表現が、トポロジーの一端を垣間見た気がして楽しかった。
山田のコメント: なるほど。
- 記述が簡潔で洗練されており、数学系っぽさを感じるとともに言葉が正確に促え(原文ママ: 捉え)られているか不安になります。
山田のコメント: そうかもしれません。書かれたままに読むのが原則ですね。
- 前回「気になります」と書いた者です。一応きちんと質問のあとにより求める回答を頂くための補足として追記した文だったのですが、上手く伝わらずすみません(したがって質問ではありませんでした)。 **山田のコメント:** 読み取れず申し訳ありません。
- 命題 3.7 の証明で \mathbb{Z} のとびとびさ(ぎっしりでない)を使うのが面白いです。また、直感的な回転数と i_{γ} が一致することも不思議で面白いです。 **山田のコメント:** 「とびとびさ」は「離散性」といいます。
- 教科書を読んでみようと思いました。 **山田のコメント:** 読んでください。
- いろいろな数学的対象も性質を大域的性質と局所的性質に分けて考えてみるのは面白そうだと思います。どっちでもない性質などもあるかもしれませんが。 **山田のコメント:** そうですね。もとより厳密に定義された語ではないので。
- 閉曲線の定義が C^{∞} 級なのは、それに付随(原文はたぶん誤字)する全曲率などの概念を考える上で都合がよいからなのでしょう。個人的に loop も閉曲線にいれてあげたいです(だって閉じてるし!) **山田のコメント:** 回転数が整数にならない。
- 段々ついていけなくなってきて自分の力不足を感じる日々です。 **山田のコメント:** 当方の力の問題(力づくでわからせる?)
- 力こそパワー **山田のコメント:** は?

質問と回答

質問 1: 弧長パラメータ s による微分を $\dot{}$ で書くときと $'$ で書く時がありますが, 明確な使い分けがあるわけではないと考えて良いですか. **お答え:** はい. 曖昧で申し訳ない. テキストでは特に $'$ を弧長に関する微分としている.

質問 2: 閉曲線の周期が写像 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ から自然に定まるのではなく, 基本周期の $n \in \mathbb{N}$ 倍だけの自由度があり, 周期が異なる曲線は (たとえ写像として等しくても) 異なるとみなすというのは, つまり閉曲線とは γ の関数形と周期 L の組として与えられるということですか. **お答え:** はい. そのとおりです.

質問 3: 周期 L の閉曲線は周期 kL の閉曲線 ($k \in \mathbb{N}$) にもなりますが, 断りがなければ周期は取りうる値のうち最小のものを取るのでしょうか? **お答え:** ここでは周期を指定することにします.

質問 4: γ の周期が L のとき \mathcal{F} や κ の周期も L になるのは γ が弧長でなくても成り立ちますよね? しかし回転数が整数になるのに弧長が必要であるのは証明の最初に行う適当な回転と平行移動が存在しないためですよね? 弧長でない γ から κ を求める方法があるように弧長でない γ から T_γ を求める方法がありますか?

お答え: 一番目: はい. 二番目: いいえ. 回転角の弧長に関する微分が曲率になる, という事実しか使っていません. 三番目: 置換積分の公式 (パラメータを t , 弧長を s としたとき $ds = |\dot{\gamma}| dt$ ($\dot{} = d/dt$)).

質問 5: 一般の曲線に対して回転数は定義されますか. 回転数というものを素朴に考えると, 連続性くらいを課せば定義できるような気がするのですが, どうなのでしょう. **お答え:** 回転数は, 単位接ベクトル $e(t)$ が単位円を「何回まわったか」を表す量なので $e(t)$ が連続なら定義できます. そのためには曲線が C^1 -級なら十分だろうか.

質問 6: 閉曲線の定義で「 C^∞ 級」を「 C^2 級」に弱めるとします. すると例えば, レムニスケートは (図省略: 2つの反対周りの円を接するようにつなげたもの) と正則ホモトピー同値になります. このようにどんな閉曲線も円をいくつか互いに交わらないように組み合わせると正則ホモトピー同値になると思ったのですが, 正しいですか. 回転数を計算するだけであれば適切な曲線を変形してから切り離してもいいんじゃないかと思いました.

お答え: ご提案の図形は C^1 級にしかありません (実際, 曲率が連続にならない) が, おっしゃることは概ね正しそうです. テキスト 37 ページの定理 3.4 (ホイットニーの公式) の証明はご質問のようなアイデアを使っています.

質問 7: 3-1 の問題では $0 < a < 1$ では自己交叉を持っていた. パラメータ表示の際は自己交叉は特異点でないため全曲率を求めることができる. 陰関数表示の際は自己交叉も特異点になり得るため, 自己交叉の場合にしか特異点を持たない陰関数表示の場合も全曲率を求めることができない場合が出てくるのだろうか.

お答え: いまのところ陰関数表示された曲線の全曲率は定義していません.

質問 8: 楕円の媒介変数表示 $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ を用いて, $\kappa(t)$ を求め, 全曲率を計算する際, 講義資料 p5, 命題 3.1 の分母が 3 乗でなく, 2 乗だと正しい結果がでたのですが, どこが誤っているのでしょうか.

お答え: t は弧長でないので, 弧長 s に取り直すと $ds = |\dot{\gamma}| dt$.

質問 9: 問題 3-1 の γ_a は弧長パラメータ表示である必要はないのでしょうか. **お答え:** 弧長に直したふりをする.

質問 10: 曲率はたしかに k 倍の相似拡大で $1/k$ になることが実際の計算でわかりますが, 全曲率が相似拡大で不変の理由がわかりません. 式を見る限り, 曲率のみが $1/k$ 倍となり, 他は変わらない (積分範囲など不変) なので, 全曲率も $1/k$ になりそうですが, なぜですか. **お答え:** 相似拡大で弧長は保たれません.

質問 11: 命題 3.5 は空間曲線でも成り立つように思いますが, たとえば事実 3.8 は成り立ちそうに思えません. 3 次元以上で閉曲線を考えたときにも, 事実 3.8 における回転数のように, 強力な性質を成り立たせる不変量はありますか. **お答え:** 空間曲線では命題 3.5 は成立しない. たとえば, 問題 3-1 にでてくる曲線 γ_0 と γ_2 は \mathbb{R}^3 内の平面にのっている曲線とみなすと, \mathbb{R}^3 内で滑らかに変形できる. したがって全曲率は 0 から 2π まで連続的に変化する.

質問 12: 今はユークリッド空間上で曲線を考えて全曲率や回転数を定義していますが, 例えばメビウスの帯などの歪んだ空間上でも回転数は定義できますか? **お答え:** 一般にリーマン多様体上の閉曲線には曲率, 全曲率は定義できますが, その値は 2π の整数倍になるとは限りません.

質問 13: 自己交叉をもたない曲線と自己交叉をもつ曲線が正則ホモトピー同値になることはありますか. これは「同じ」と言っているのでしょうか. **お答え:** あります. 正則ホモトピー同値といってよいです.

質問 14: 自己交叉の有無あるいはその数を反映して曲線を分類する同値関係はありますか? **お答え:** 交点数.

質問 15: 自己交差のない閉曲線の回転数は ± 1 である, というように自己交差の数が n ($\in \mathbb{N}$) である閉曲線の回転数としてあり得る数は明示できるのでしょうか. また 1 つの n につき, 考えうる回転数は有限ですか.

お答え: 例えば, テキスト 37 ページの定理 3.4.

質問 16: カスプと呼ばれる特異点では曲率のようなものを考えられると仰っていたかと思うのですが, 今回の課題の

$a = 1$ のときのものが、向きが反転する特異点で、そのようでした。レムニスケートと円の境界のイメージから想像したのですが、ひょっとすると向きの反転を π 回転, $-\pi$ 回転と対応させるのがその考え方になるのでしょうか。 **お答え:** 講義で言及した「カスプ的曲率」はご質問のものとは違い、もう少し精密な量を表しています。ご質問のような考え方については講義で少し述べます。

質問 17: 教科書 (山田注: 30 ページ) の図で、閉曲線の連続的变化を表すものがありました。この場合、速度ベクトルが消える点 1 つに対して、新たに 1 つ回転数が増えています。速度ベクトルが消える点が 2 つ以上回転数が増えるということはありませんか。 **お答え:** あります。講義で説明します。

質問 18: 今回の問題のように定数が変化 (山田注: “パラメータが変化” では? 定数は変化しない) することで滑らかに曲線が変わる際、特異点をもつような定数値 (今回なら $a = 1$) の前後で回転数は連続的な整数値をとるのでしょうか。 **お答え:** いいえ。

質問 19: 正則ホモトピー同値を示すための関数 $\sigma: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (山田注: 原文ママ; 矢印は \rightarrow とすべき) において、変形を表すパラメータの定義域が $[0, 1]$ で十分なのは、パラメータに必要であれば種々の変形を入れ、 $[0, 1]$ 区間のパラメータにできるからでしょうか? **お答え:** そのとおりです。

質問 20: 講義資料の 2 つの閉曲線 $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$ が正則ホモトピー同値であるということの定義において、変換の推移を表現するような変数 $\alpha \in [0, 1]$ が出てきて、 α が含まれる集合が閉集合になっています。しかし、問題 3-1 の $a = 1$ の場合のように変形の途中で回転数が変わるような特異点がある場合には、そのような特異点を除いた、たとえば $[0, 1)$ のような開集合 (原文ママ: 確かに $[0, +\infty)$ の開集合ですね) の変形で回転数が保存されます。この場合、正則ホモトピー同値であることの定義の中の「 $\sigma_0(t) = \gamma_0(t), \sigma_1(t) = \gamma_1(t)$ 」という部分はどのように考えればよいのでしょうか。 **お答え:** 各 $a \in (0, 1)$ を止ると γ_0 と γ_a は変形 $[0, a] \times \mathbb{R} \ni (t, \alpha) \mapsto \gamma_\alpha(t)$ により正則ホモトピー同値。この a が任意だから、任意の $a \in (0, 1)$ に対して γ_a は γ_0 と正則ホモトピー同値。

質問 21: 講義資料 3 の 6 ページの定義 3.6 で、「 C^∞ 級写像 $\sigma: [0, 1] \times \mathbb{R} \ni (\alpha, t) \mapsto \sigma_\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ 」とありますが、これは t について C^∞ 級であるということでしょうか。 α が連続だが微分可能でない場合は何か不都合が生じるのでしょうか。 **お答え:** ここでは不都合は生じません。ですので、「連続写像 $\sigma: [0, 1] \times \mathbb{R} \ni (\alpha, t) \mapsto \sigma_\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ で、各 α において $t \mapsto \sigma_\alpha(t)$ が C^∞ 級」としておいて問題ないです。面倒なので全体で C^∞ 級としてしまいました。

質問 22: 講義資料 3 の定義 3.6 で σ は C^∞ -級とあるが、これは t だけでなく α についても C^∞ -級ということなのですか。もし α については C^∞ -級でないとしたら、命題 3.7 の証明で $\sigma_\alpha(t)$ が α の連続関数だとしている理由を教えてください。 **お答え:** $\sigma_\alpha(t)$ は α と t の 2 変数関数として C^∞ -級としています。

質問 23: 定義 3.6 で σ は C^∞ 級とされていますが、定義内では σ の正則性以外に微分が必要となるところがないので C^1 -級でも問題ないかなと思ったのですが、これは何か理由があるのですか。

お答え: 曲率が定義されるために $t \mapsto \sigma_\alpha(t)$ は t について C^2 -級である必要がある。ここでは曲線を C^∞ としているので、 C^∞ とした。 α についてはおっしゃるとおり連続であれば十分。

質問 24: 命題 3.7 で「 $\sigma_\alpha(t)$ の回転数は α の連続関数になる」というところは (式省略, α から σ_α への写像と σ_α から $i_{\sigma_\alpha} \in \mathbb{Z}$ への写像) がともに連続ということから分かるのだと思われるのですが、後半の連続性はどのような理由で言えますか。 **お答え:** 積分のパラメータに関する連続性です。

質問 25: $\sigma: [0, 1] \times \mathbb{R} \ni (\alpha, t) \mapsto \sigma_\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ について、「 $[0, 1] \times \mathbb{R} \ni (\alpha, t)$ 」とは「 $\alpha \in (0, 1)$ と $t \in \mathbb{R}$ の組み合わせ」という意味であっていますか。 (“ \times ” は組み合わせの意味ですか) **お答え:** 「組み合わせ」でなく (この語は別の数学的な意味をもつ) 「組」。「直積集合」という言葉、集合の直積記号 “ \times ” は馴染みがないでしょうか。

質問 26: 正則ホモトピー同値について (略) というイメージはありませんが、写像の説明が分かりません。記号の使い方や意味が理解できませんでした。 **お答え:** 直積集合の記号は不慣れですか?

質問 27: ホモトピー同値であることと、位相同型であることは同値関係ですか? **お答え:** ホモトピー同値 (この講義では定義していない) は同値関係。位相同型 (これも定義していない; 対象は何?) も同値関係。「ホモトピー同値であることと位相同型であることは同値」ではない (ここで「同値関係」という語を用いるのは不適切)。

質問 28: なめらかな変形が具体的などのような変形で、式にするとどうなるのか知りたい。 **お答え:** 例: 問題 3-1。

質問 29: 2 つの正則曲線の回転数が一致することとそれらが正則ホモトピー同値であることが同値であるため、すべての正則閉曲線を回転数によって同値類に分類するのが正則ホモトピー同値という関係ですか? **お答え:** はい。§3。

質問 30: 正則ホモトピー同値は同値類でまとめると数種類で収まりますか。 **お答え:** いいえ。テキスト 30 ページ。

質問 31: 正則ホモトピーについて調べるとホモトピー同値という言葉が多く出てきます。中身をみても同じように見えたのですが、正則ホモトピー同値 \neq ホモトピー同値 なのですか? 違いを教えてください。

お答え: 正則ホモトピー同値では、変形の間がずっと正則曲線であることを要求しています。

- 質問 32: 問 3-1 のような問題で, 高校生で学んだ増減表を調べることで回転数を求めることは厳密ではないでしょうか. また, 全曲率や回転数は閉曲線の曲率に対して定められていると思いますが, $a = 1$ のような loop のときは回転はしていないのでしょうか. **お答え:** 前半: どの関数の増減を調べるかによる. 単位接ベクトルが単位円を何回回るかが回転数だから, 単位円の特定の点を何回通るかがわかれば (よく考えれば, 中間値の定理を用いて) 回転数を求めることができるが, そのためにどの関数の増減を調べるべきか, 明確に書いてみよう. 後半: 回転数を (今回) 定義しなかったことと, 「回転していない」ということは独立. 後者は何の回転を考えているかによる.
- 質問 33: 曲率から全曲率を求めるのが厳しかったらグラフの増減表から求めるのはアリですか? (厳密性がないような気がします...) **お答え:** 一つ前の質問と回答参照.
- 質問 34: 弧長パラメータ表示で表示された正則曲線 $\gamma(s) = {}^t(x(s), y(s))$ を考えたときに, 曲率円の中心の点の表示 ${}^t(x_C(s), y_C(s)) = (\text{略})$ を s で微分したものに, 曲線を s で 2 階微分したものを代入して, (略) となることから, 曲率円の中心の軌跡の接線と曲線の接線は直交すると言えますか. **お答え:** はい.
- 質問 35: 正則ホモトピー同値での写像 σ について, $[0, 1]$ の端点での微分はどのように考えるのだろうか.
お答え: 一般に, 閉区間 $[a, b]$ で定義された関数 f が C^∞ 級であるとは, $[a, b]$ を含む開区間 J 上で定義された C^∞ -級関数 \tilde{f} で, 区間 $[a, b]$ への制限が f と一致するものが存在すること.
- 質問 36: 回転数のイメージは, 反時計回り回転を 1, 時計回り回転を -1 とし, 周期分だけ経路を進んだ時の $1, -1$ の合計みたいな感じでしょうか? **お答え:** イメージですから, あなたがそれで理解できるならよいと思います. あえていうなら「回転」とは何の回転のことを表しているか明確にしておいてください.
- 質問 37: 問題 3-1 では $a = 1$ のとき正則でなくなると思うが, この際は $[0, 1)$ と $(1, \infty)$ に区間をわけて考えればよいのだろうか. **お答え:** はい.
- 質問 38: テキスト 31 ページ, 定理 3.2 の証明で, 33 ページ 13 行目「 $\Theta(0, s)$ の連続性より」以降の部分が何をしているかが理解できませんでした. 「 $-\frac{\pi}{2} < \Theta(0, s) < \frac{3\pi}{2}$ ($0 \leq s \leq 1$)」と「 $\Theta(0, l) - \Theta(0, 0) = \pi$ 」はなぜ導くことができるのかを教えてくださいませんか. **お答え:** $\Theta(0, s) + \frac{\pi}{2} \neq 2\pi m$, とくに $\Theta(0, s) \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. $\Theta(0, 0) = 0$ なので (連続性より) $\Theta(0, s)$ は区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ からははみ出さない. とくに $\Theta(0, l) - \Theta(0, 0) \in \pi\mathbb{Z}$ なので結論が得られる.
- 質問 39: 弧長は曲線全体を見ないと分からない性質だと思うので, 弧長は大域的な性質の一つなのではないかと思いました. しかしもしそうだとすると定義 2.4 で曲率は弧長パラメータを使って定義されていますが, 局所的性質である曲率が局所的性質である弧長を用いて定義されている弧長パラメータ表示を知っていることを前提に定義されているのを少し変に感じました. 弧長は大域的性質ではないのでしょうか? あるいは弧長は大域的性質でも局所的性質でもないということですか? それともこの考え方に誤りがありますか? **お答え:** 弧長関数を求めるには始点の一つ決めて積分するので「大域的」とお考えなのですね. パラメータが弧長である, という自体は $|\dot{\gamma}| = 1$ という性質なので局所的. さらに弧長パラメータは定数の差を除いて一意なので, 「弧長に関する微分」も局所的な概念.
- 質問 40: レムニスケート曲線 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ のような $y =$ の形にできない曲線のグラフを猫く (原文ママ: 描く) 方法はあるのでしょうか? もともと外形を知らない猫くことは出来ないのでしょうか?
お答え: 「 $y =$ の形にできない」というのをもう少し格好よくいう言い方を調べておいてください. さて, この曲線は一部に限ればグラフ表示できませんか? 円や楕円と同じように. 第 7 回目に少し説明します.
- 質問 41: 自己交叉は曲線が接しているような場合を含むようですが, 交わっているもののみを指す言葉がありますか?
お答え: 接しないで交わることを「横断的 transversal に交わる」といいます. 自己交叉が横断的で, 一つの交点では 2 つの曲線の部分しか交わっていないような曲線をジェネリック generic といいます. テキスト 35 ページ.
- 質問 42: トポロジーでは球やトラスを区別するためにそれぞれに不変量に対応させると聞いたことがあります. それは今回の回転数の概念を拡張することで得られるのでしょうか.
お答え: 直接そうはなりません, 考え方は近いと思います.
- 質問 43: 「閉曲線」のスライド 2 ページ目, 前回の課題の解説で, $\gamma(s) = (\text{略}; \text{曲率から曲線を復元する公式})$ と θ を定義することで一般に曲率から元の弧長パラメータ表示を勝手に復元できるということですか?
お答え: はい, 前々回にそういうことを説明しました.
- 質問 44: 正則閉曲線はすべて一筆書きできますか? もしそうなら一筆書きできない閉曲線に対してなめらかな変形は考えられないということですか? **お答え:** 閉曲線の定義は周期写像 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. この写像自体が一筆書きを与えていませんか?
- 質問 45: 自己交叉する点までを周期とすると単純閉曲線となりますか? **お答え:** どういう状況を想定していますか.

4 曲率円

■平面曲線 (復習) 弧長によってパラメータ付けられた C^∞ -級平面曲線 $\gamma: \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}^2$ の単位接ベクトル $\mathbf{e}(s) := \gamma'(s)$ に対して, 左向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}(s)$ をとると, フルネ粹 $\mathcal{F} := (\mathbf{e}, \mathbf{n}): J \rightarrow \text{SO}(2)$ が得られる. $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega$ ($\Omega := \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$) を満たす関数 κ を γ の曲率とよぶ.

命題 4.1. 平面曲線の正則なパラメータ表示 $\gamma(t)$ に対して $\kappa(t) = \det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))/|\dot{\gamma}(t)|^3$ で与えられる.

■グラフ表示 正則にパラメータ付けられた平面曲線 $\gamma(t)$ 上の点 $P = \gamma(t_0)$ を固定し, $\mathbf{e}(t_0), \mathbf{n}(t_0)$ をそれぞれ点 P における進行方向の単位接ベクトル, 左向き単位法線ベクトルとする.

補題 4.2. 上の状況で \mathbb{R}^2 の向きを保つ合同変換 F で, $\tilde{\gamma} := F \circ \gamma$ で $\tilde{\gamma}(t_0) = {}^t(0, 0)$, 進行方向の単位接ベクトル, 左向き単位法線ベクトルがそれぞれ $\tilde{\mathbf{e}}(t_0) = {}^t(1, 0)$, $\tilde{\mathbf{n}}(t_0) = {}^t(0, 1)$ を満たすものが存在する.

証明: $A := (\mathbf{e}(t_0), \mathbf{n}(t_0))$, $\mathbf{a} := \gamma(t_0)$ とおき, $F(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ とおけばこれが求めるものである.

補題 4.3. 正則平面曲線 $\gamma(t)$ とその進行方向の単位接ベクトル \mathbf{e} , 左向き単位法線ベクトル \mathbf{n} が

$$(4.1) \quad \gamma(t_0) = \mathbf{O} = {}^t(0, 0), \quad \mathbf{e}(t_0) = {}^t(1, 0), \quad \mathbf{n}(t_0) = {}^t(0, 1)$$

を満たしているとき, 0 を含む開区間 J' , t_0 を含む開区間 J とパラメータ変換 $\varphi: J' \ni x \mapsto t = \varphi(x) \in J$ および C^∞ -級関数 $f: J' \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $\gamma \circ \varphi(x) = {}^t(x, f(x))$ とかける. すなわち γ は C^∞ -級関数 f のグラフで表示される. さらにこの関数 f は $f(0) = f'(0) = 0$ を満たす.

証明: $\gamma(t) = {}^t(x(t), y(t))$ とおくと, C^∞ -級関数 x は $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) > 0$ を満たすので, t_0 を含む開区間 J で $\dot{x} > 0$, x の像 J' は原点を含む開区間となる. 逆関数定理から $\varphi: x \mapsto t = \varphi(x)$ も C^∞ -級で $\gamma \circ \varphi(x) = (x \circ \varphi(x), y \circ \varphi(x)) = (x, f(x))$. 後半は (4.1) から分かる.

■曲率円 正則平面曲線 $\gamma(t)$ の $P := \gamma(t_0)$ における曲率を $\kappa(t_0)$, 左向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}(t_0)$ と書く.

定義 4.4. 上の状況で,

- $\kappa(t_0) \neq 0$ のとき $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{\kappa(t_0)} \mathbf{n}(t_0)$ となる点 C を中心とした半径 $1/|\kappa(t_0)|$ の円で P における進行方向が γ と一致するような円 C_P を γ の $P = \gamma(t_0)$ における曲率円, その半径を曲率半径という.
- $\kappa(t_0) = 0$ のとき, γ の $P = \gamma(t_0)$ における接線で接点 P における進行方向が γ のそれと一致するものを t_0 における γ の曲率円という.

例 4.5. 曲線が補題 4.3 のようにグラフ表示されているとき, 原点における曲率は $\kappa(0) = f''(0)$ で,

- $\kappa(0) \neq 0$ のとき, 原点における曲率円は円 $x^2 + (y - 1/f''(0))^2 = 1/(f''(0))^2$.
- $\kappa(0) = 0$ のとき, 原点における曲率円は x 軸.

ただし, これらの曲率円の進行方向は原点において「右向き」とする.

■**接触** 二つの正則平面曲線 $\gamma(t), \sigma(u)$ が $\gamma(t_0) = \sigma(u_0) =: P$, すなわち点 P で交わり, その点で進行方向を共有するとき, γ と σ は P で **1 次の接触** をするという. このとき, 補題 4.2 のような向きを保つ等長変換を γ, σ に施し, それぞれの曲線を原点の近くで ${}^t(x, f(x)), {}^t(x, g(x))$ とグラフ表示しておく. この状況で γ, σ が $P = \gamma(t_0) = \sigma(u_0)$ で p 次の接触 ($p = 2, 3, \dots$) をするとは, 次が成り立つことである:

$$\frac{d^k f}{dx^k}(0) = \frac{d^k g}{dx^k}(0) \quad (k = 1, \dots, p).$$

命題 4.6. 平面曲線 $\gamma(t)$ の点 $P = \gamma(t_0)$ における曲率円は P において γ と 2 次の接触をする.

■**座標変換** 一般に \mathbb{R}^n の領域 U から \mathbb{R}^m への C^∞ -級写像 $f = {}^t(f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ の点 P における微分とは, $(df)_P: \mathbb{R}^n \ni v \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(P + tv) \in \mathbb{R}^m$ のことである. $(df)_P(v) = (Df)(P)v$ が成り立つので $(df)_P$ は線形写像である. ここで, (m, n) -行列に値をもつ関数 $Df := \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)$ は f のヤコビ行列とよばれる.

定義 4.7. 領域 $U \subset \mathbb{R}^m$ から領域 $V \subset \mathbb{R}^m$ への全単射 $\Phi: U \rightarrow V$ が微分同相写像であるとは, Φ と Φ^{-1} がともに C^∞ -級となることである. これを**座標変換**ということもある.

例 4.8. • \mathbb{R} から \mathbb{R} への写像 $x \mapsto \sinh x$ は微分同相写像である.

- \mathbb{R} から \mathbb{R} への写像 $x \mapsto x^3$ は微分同相写像でない.
- $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ への写像 ${}^t(r, \theta) \mapsto {}^t(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$ は微分同相写像でない.
- $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ から $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \leq 0\}$ への写像 ${}^t(r, \theta) \mapsto {}^t(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$ は微分同相写像.

事実 4.9. 「二つの平面曲線が p 次の接触をする」という性質は座標変換によらない. すなわち, 二つの平面曲線 $\gamma(t), \sigma(u)$ が点 $P := \gamma(t_0) = \sigma(u_0)$ で p 次の接触をするならば, P の近傍 U で定義された微分同相写像 $\Phi: U \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^2$ に対して $\Phi \circ \gamma, \Phi \circ \sigma$ は $\Phi(P)$ で p 次の接触をする.

■**縮閉線** 正則曲線 $\gamma(s)$ の左向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}(s)$, 曲率関数を $\kappa(s)$ とする. $\kappa(s)$ が零点を持たないとき, $\gamma(s)$ の曲率円の中心の軌跡

$$\sigma(s) := \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s)$$

を γ の**縮閉線** evolute という.

補題 4.10. 縮閉線の特異点は $\kappa'(s) = 0$ となる s に対応する点である.

証明: 曲線 $\gamma(s)$ が弧長 s で表示されているとき, 縮閉線 $\sigma(s)$ の速度ベクトルは $-(\kappa'(s)/\kappa(s)^2)\mathbf{n}(s)$.

問題

4-1 弧長でパラメータづけられた平面曲線 $\gamma: \mathbb{R} \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ の曲率関数が $\kappa(s) = s$ であるとき,

- (1) γ の制限 $\gamma|_{(0, +\infty)}$ の縮閉線 $\sigma(s)$ に対して $\lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma(s)$ が存在することを示しなさい.
- (2) $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s)$ が存在することを示しなさい.

4-2 弧長 s でパラメータ表示された空間曲線 $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($J \subset \mathbb{R}$ は区間) の像が \mathbb{R}^3 の原点を中心とする半径 $1/a$ ($a > 0$) の球面上に含まれているとする. このとき, $|\gamma''| \geq a$ であることを示しなさい. (ヒント: $|\gamma| = 1/a$ であることと, シュワルツの不等式.)