幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

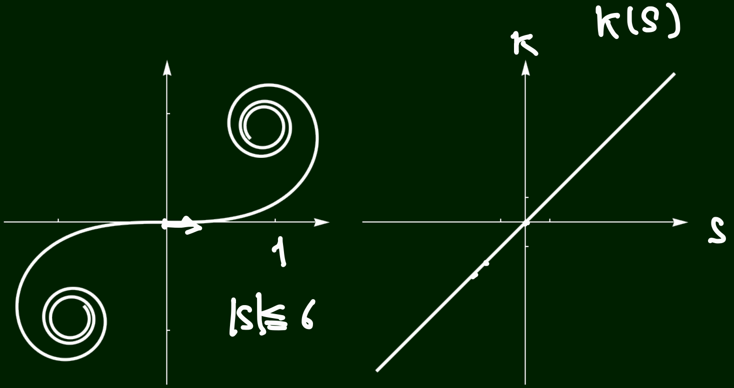
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/11/10

クロソイド clothoid

- 曲率関数が弧長と一致する（比例する）平面曲線.

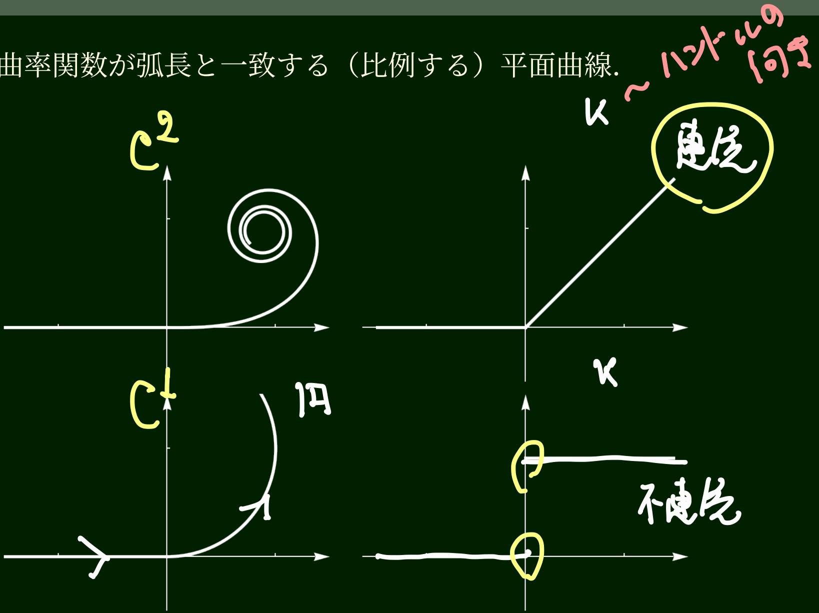


サガンクロス

九州縦貫自動車道
九州横断自動車道
大分自動車道
長崎大分線
鳥栖JCT
山下川
秋光川
永吉町
永世神社
古四国第29番札所
九州メタル産業(株)
九州薬品工業(株)
居酒屋 犬も歩けば
(株)博運社 小郡営業所
シモハナ物流
ローソン 小郡大原西店
宮本表具店
しらき歯科医院
ヤンマーアグリジャパン 小郡支店
ブラスワンコンテナ 小郡市小郡店
北浦児童公園
光明霊園
株式会社サンワユキ
CAR NEXUS
タイラベストビート
小郡駅前郵便局
小郡日吉神社
小郡市立小郡幼稚園
老松神社
北谷薦 本格信州蕎麦
ドラッグイレブン小郡店
平成堂薬局 小郡店
すき家 500号小郡店
麺勝 小郡店
スペースワン
Estrella Salon
高尾看護専門学校
福岡日産自動車 小郡店
カラオケイエロー
新町公民館
コスモ音
佐賀県高速道路交通警察隊鳥栖分駐隊
鳥栖料金所
JAさが東部地区 永吉共乾
いしまる整体施術院
幡崎日吉神社
幡崎町
永吉地区処理場
株式会社キューソー流通システム 鳥栖第…
和風韓国料理/和牛焼肉ソウルママ
Google
画像 ©2022 CNES / Airbus、Maxar Technologies、Planet.com、地図データ ©2022　100 m

クロソイド clothoid

- 曲率関数が弧長と一致する（比例する）平面曲線.



問題 4-1

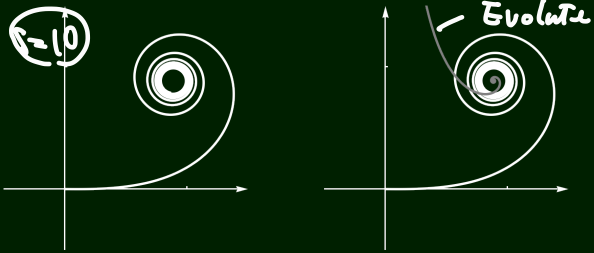
$\gamma(s) = \sigma(s) - \frac{1}{s} n(s)$

問題

弧長でパラメータづけられた平面曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ の曲率関数が $\kappa(s) = s$ であるとき，

1. γ の制限 $\gamma|_{(0,+\infty)}$ の縮閉線 $\sigma(s)$ に対して $\lim_{s\to+\infty} \sigma(s)$ が存在することを示しなさい．
2. $\lim_{s\to+\infty} \gamma(s)$ が存在することを示しなさい．

収束　0



問題 4-1

$\frac{u^2}{2}$ $\frac{u^2}{2}$ u

$$\gamma(s) = \int_0^s {}^t\left(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\right)\, du, \qquad \theta(s) = \int_0^s \kappa(u)\, du = \frac{s^2}{2}$$

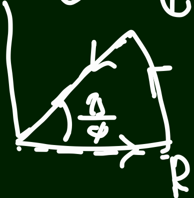
注意

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Fresnel積分

- Gauss積分
- Cauchyの積分定理

e^{-z^2} $\mathbb{C}$



微積分の復習

- 数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすならば，無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束するか．

$\sum \frac{1}{n}$

- $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ を満たすならば，広義積分 $\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束するか．

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x}\,dx = +\infty$$

問題 4-1

- $\gamma(s)$：曲率 $\kappa(s)=s$，左向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$
- $\sigma(s)$：$\gamma(s)$ の縮閉線；$\sigma(s)=\gamma(s)+\dfrac{1}{s}\boldsymbol{n}(s)$

$-\kappa e$

$$\frac{d}{ds}\sigma = \gamma' - \frac{1}{s^2}n + \frac{1}{s}n'$$

$$= \cancel{e} - \frac{1}{s^2}n + \cancel{\frac{1}{s}(-se)}$$

$$= -\frac{1}{s^2}n$$

収束

$$\sigma(s)-\sigma(1) = \int_1^s -\frac{1}{u^2}n(u)\,du$$

$$-\frac{1}{u^2} n(u) = -\left(\frac{n_1(u)}{u^2},\ \frac{n_2(u)}{u^2}\right)$$

$$\left|-\frac{n_1(u)}{u^2}\right| \leq \frac{|n|}{u^2} = \frac{1}{u^2}$$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{du}{u^2}$ ：収束

(b) ：広義積分が絶対収束.

$\Rightarrow$ $\exists \displaystyle\int_1^\infty \left(-\frac{n(s)}{s^2}\, ds\right)$

問題 4-2

問題

弧長 s でパラメータ表示された空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ ($J \subset \mathbb{R}$ は区間) の像が $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 $1/a$ ($a > 0$) の球面上に含まれているとする．このとき，$|\gamma''| \geqq a$ であることを示しなさい．（ヒント：$|\gamma| = 1/a$ であることと，シュワルツの不等式.）

$$|\gamma| = \frac{1}{a} \qquad \gamma \cdot \gamma = \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma \perp \gamma'$$

$$|\gamma'| = 1 \ (\text{弧長}) \Rightarrow \gamma' \cdot \gamma'' = 0$$

$$\gamma'' \cdot \gamma \underset{\text{部分}}{=} (\underbrace{\gamma' \cdot \gamma}_{0})' - \underbrace{\gamma' \cdot \gamma'}_{1}$$

$$= -1$$

$$1 = |-1| = |\gamma'' \cdot \gamma| \leq |\gamma''|\,|\gamma|$$

$$= |\gamma''| \cdot \frac{1}{a}$$

Cauchy-Schwarz