幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線

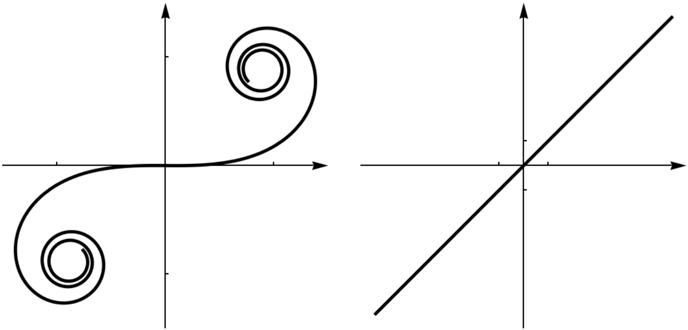
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/11/10

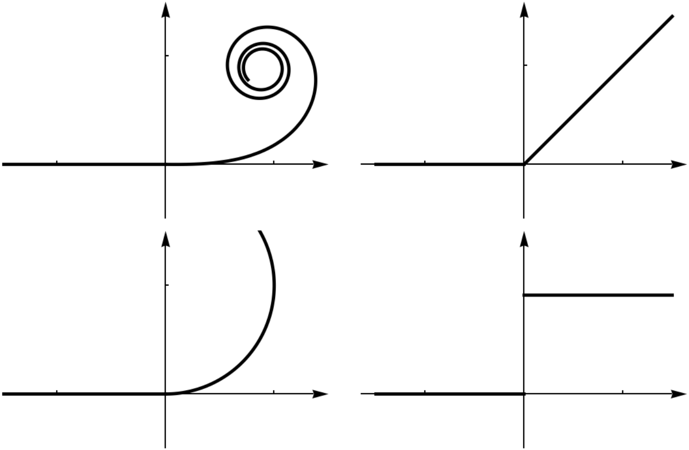
クロソイド clothoid

- 曲率関数が弧長と一致する（比例する）平面曲線.



クロソイド clothoid

- 曲率関数が弧長と一致する（比例する）平面曲線.

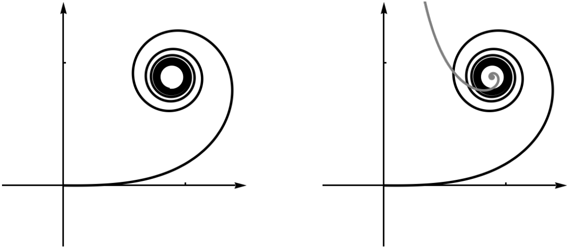


問題 4-1

問題

弧長でパラメータづけられた平面曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ の曲率関数が $\kappa(s) = s$ であるとき,

1. γ の制限 $\gamma|_{(0,+\infty)}$ の縮閉線 $\sigma(s)$ に対して $\lim_{s\to+\infty} \sigma(s)$ が存在することを示しなさい.
2. $\lim_{s\to+\infty} \gamma(s)$ が存在することを示しなさい.



問題 4-1

$$\gamma(s) = \int_0^s {}^t(\cos\theta(u), \sin\theta(u))\ du, \qquad \theta(s) = \int_0^s \kappa(u)\, du = \frac{s^2}{2}$$

注意

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

微積分の復習

- 数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすならば，無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束するか.
- $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ を満たすならば，広義積分 $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ は収束するか.

問題 4-1

- $\gamma(s)$：曲率 $\kappa(s) = s$，左向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$
- $\sigma(s)$：$\gamma(s)$ の縮閉線；$\sigma(s) = \gamma(s) + \dfrac{1}{s}\boldsymbol{n}(s)$

問題 4-2

問題

弧長 s でパラメータ表示された空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ ($J \subset \mathbb{R}$ は区間) の像が $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 $1/a$ ($a > 0$) の球面上に含まれているとする．このとき，$|\gamma''| \geqq a$ であることを示しなさい．（ヒント：$|\gamma| = 1/a$ であることと，シュワルツの不等式.）