幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線 $\mathbb{R}^3$

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/11/10

フルネ枠

$3-1=2$

- $\gamma(s)$: 空間曲線 ; s : 弧長パラメータ
- $\boldsymbol{e}(s) := \dfrac{d\gamma}{ds}(s) = \gamma'(s)$: 単位接ベクトル

$|\gamma'|=1$

定義

$$\kappa(s) := \left|\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s)\right| = |\gamma''(s)| (\geqq 0) \qquad \text{曲率}$$

補題

$\gamma'(s) \perp \gamma''(s)$

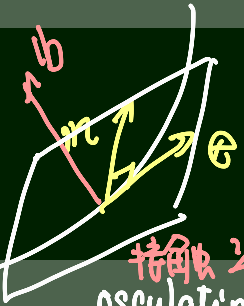
$\neq 0$

$\gamma' \cdot \gamma' = 1$

- 以下 $\kappa(s) > 0$ を仮定する.

フルネ枠

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長パラメータ
- $\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s)$：単位接ベクトル
- $\kappa(s) := |\boldsymbol{e}'(s)| = |\gamma''(s)|$：曲率
- $\kappa(s) > 0$ を仮定する



接触平面
osculating plane

ベクトル積

定義

principal normal

$$\boldsymbol{n}(s) := \frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{e}'(s) = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}$$ 単位主法線ベクトル

binormal

$$\boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$$ 単位従法線ベクトル

$$\tau(s) := -\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$$ 捩率 torsion

$$\mathcal{F}(s) := (\underbrace{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)}_{\text{正規直交系}})$$ フルネ枠 Frame

フルネ枠

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長パラメータ
- $\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s)$：単位接ベクトル
- $\kappa(s) := |\boldsymbol{e}'(s)| = |\gamma''(s)|$：曲率 ($> 0$ を仮定)
- $\boldsymbol{n}(s) := \dfrac{\boldsymbol{e}'(s)}{\kappa(s)}$：単位主法線ベクトル
- $\boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$：単位従法線ベクトル
- $\mathcal{F}(s) := (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$：フルネ枠
- $\tau(s) := -\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$：捩率

SO(3)：直交行列
det = 1

$\boxed{\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega}$

補題

$\mathcal{F}(s) \in \mathrm{SO}(3)$；$\Omega(s) := \mathcal{F}(s)^{-1}\mathcal{F}'(s)$ は交代行列

$\Leftarrow {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}' = \Omega$

${}^t\Omega = {}^t({}^t\mathcal{F}\mathcal{F}') = \{({}^t\mathcal{F}\mathcal{F})' - {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}'\}$

フルネ・セレの公式

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長パラメータ；曲率 $\kappa(s) > 0$
- $\mathcal{F}(s) := (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$：フルネ枠
- $\tau(s) := -\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$

定理 (フルネ・セレの公式；定理 4.2)

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\frac{dF}{ds} = F\Omega \qquad F = (e.\ n.\ b)$$

第一列 $\quad \dfrac{de}{ds} = \kappa n = 0e + \kappa n + 0b$

第三列 $\quad \dfrac{db}{ds} = \overset{0}{A}e + Bn + \overset{0}{C}b$

$$\tau = \boxed{-b' \cdot n}$$

$$\parallel$$

$$-B$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

フルネ・セレの公式

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長パラメータ
- $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$：フルネ枠；$\kappa > 0$：曲率；$\tau$：捩率

定理 (フルネ・セレの公式；定理 4.2)

$$\boldsymbol{e}' = \kappa \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n}' = -\kappa \boldsymbol{e} + \tau \overset{\boldsymbol{b}}{\cancel{\boldsymbol{n}}}, \qquad \boldsymbol{b}' = -\tau \boldsymbol{n}.$$

フルネ・セレの公式（例題）

$$\boldsymbol{e}' = \kappa \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n}' = -\kappa \boldsymbol{e} + \tau \cancel{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{b}, \qquad \underbrace{\boldsymbol{b}' = -\tau \boldsymbol{n}.}_{0}$$

定理

振率が恒等的に零である空間曲線は平面曲線である.

- $\underline{b : \mathrm{const}}$

$$g(s) := \left(\gamma(s) - \overset{a}{\overset{\shortparallel}{\gamma(s_0)}}\right) \cdot b$$

$$g(s_0) = 0 \qquad g'(s) = e \cdot b = 0$$

$$\therefore\ g(s) \equiv 0 \qquad \gamma(s) \in \underbrace{\{x \mid (x - a) \cdot b = 0\}}_{\text{平面}}$$

例：つるまき線（常螺線；helix）例 5.6

旋

$a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}$:

$|\dot{\gamma}| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\gamma(t) = {}^t\left(a\cos t, a\sin t, bt\right)$$

$$\tilde{\gamma}(s) = {}^t\left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right) \qquad \left(c = \sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \kappa = |a|/c^2, \quad \boxed{\tau = b/c^2}$$

const

bとτの符号が一致する

例：ブーケの公式

系 (系 5.3; ブーケの公式)

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0)\boldsymbol{e}_0 + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 \kappa_0 \boldsymbol{n}_0 + \frac{1}{6}(s - s_0)^3(-\kappa_0^2 \boldsymbol{e}_0 + \kappa_0' \boldsymbol{n}_0 + \kappa_0 \tau_0 \boldsymbol{b}_0) + o((s - s_0)^3) \quad (s \to s_0)$$

例：ブーケの公式

- $\gamma(s_0)$ を通り，$\boldsymbol{e}(s_0)$，$\boldsymbol{n}(s_0)$ に平行な（$\boldsymbol{b}(s_0)$ に垂直な）平面を γ の s_0 における接触平面という．
- $\gamma(s_0)$ を通り，$\boldsymbol{n}(s_0)$，$\boldsymbol{b}(s_0)$ に平行な（$\boldsymbol{e}(s_0)$ に垂直な）平面を γ の s_0 における法平面という．
- $\gamma(s_0)$ を通り，$\boldsymbol{b}(s_0)$，$\boldsymbol{e}(s_0)$ に平行な（$\boldsymbol{n}(s_0)$ に垂直な）平面を γ の s_0 における展直平面という．

系 (系 5.4)

空間曲線 $\gamma(s)$ の像の，曲率が零でない点 $\gamma(s_0)$ における接触平面，展直平面への正射影は s_0 の近くで正則曲線を与える．一方，法平面のへの正射影は s_0 に特異点をもつ．

空間曲線の基本定理（次回予告）

定理 (空間曲線の基本定理)

区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 2 つの C^∞-級関数 κ, τ が与えられ，とくに $\kappa > 0$ が J 上で成り立っているとする．このとき，弧長によりパラメータづけられた C^∞-級の空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で，曲率，捩率がそれぞれ κ, τ となるものが存在する．さらにそのような曲線は変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$（$A \in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$）を除いて一意的である．

問題 5-1

問題

$$\gamma(s) = {}^t\left(\tan^{-1} s, \frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+s^2), s - \tan^{-1} s\right)$$

1. s は γ の弧長パラメータであることを確かめなさい．
2. γ の曲率と捩率を求めなさい．
3. s によらず γ の速度ベクトルと一定の角をなす単位ベクトル v を求めなさい．

$$\frac{dv}{ds} = 0$$

$$v = p(s)e(s) + q(s)n(s) + r(s)b(s)$$

問題 5-2

問題

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長
- $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$：フルネ枠.
- $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s) + \lambda(s)\boldsymbol{n}(s)$ は次を満たす：
  - $\tilde{\gamma}(s)$ は正則曲線
  - $\tilde{\gamma}'$, $\tilde{\gamma}''$ は一次独立
  - $\tilde{\gamma}$ の従法線ベクトル $\tilde{\boldsymbol{b}}(s)$ は $\boldsymbol{n}(s)$ と平行

このとき

1. λ は零でない定数であることを示しなさい.
2. γ の曲率 κ，捩率 τ および λ が満たす関係式を求めなさい.

本日の課題の提出締切は

2022 年 11 月 14 日（月曜日）07:00 JST