幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/11/10

フルネ枠

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長パラメータ
- $\boldsymbol{e}(s) := \dfrac{d\gamma}{ds}(s) = \gamma'(s)$：単位接ベクトル

定義

$$\kappa(s) := \left|\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s)\right| = |\gamma''(s)|\,(\geqq 0) \qquad \text{曲率}$$

補題

$\gamma'(s) \perp \gamma''(s)$

- 以下 $\kappa(s) > 0$ を仮定する.

フルネ枠

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長パラメータ
- $\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s)$：単位接ベクトル
- $\kappa(s) := |\boldsymbol{e}'(s)| = |\gamma''(s)|$：曲率
- $\kappa(s) > 0$ を仮定する

定義

$\boldsymbol{n}(s) := \dfrac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{e}'(s) = \dfrac{\gamma''(s)}{\lvert\gamma''(s)\rvert}$	単位主法線ベクトル
$\boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$	単位従法線ベクトル
$\tau(s) := -\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$	捩率
$\mathcal{F}(s) := (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$	フルネ枠

フルネ枠

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長パラメータ
- $\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s)$：単位接ベクトル
- $\kappa(s) := |\boldsymbol{e}'(s)| = |\gamma''(s)|$：曲率 ($> 0$ を仮定)
- $\boldsymbol{n}(s) := \frac{\boldsymbol{e}'(s)}{\kappa(s)}$：単位主法線ベクトル
- $\boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$：単位従法線ベクトル
- $\mathcal{F}(s) := (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$：フルネ枠
- $\tau(s) := -\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$：捩率

補題

$\mathcal{F}(s) \in \mathrm{SO}(3)$；$\Omega(s) := \mathcal{F}(s)^{-1}\mathcal{F}'(s)$ は交代行列

フルネ・セレの公式

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長パラメータ；曲率 $\kappa(s) > 0$
- $\mathcal{F}(s) := (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$：フルネ枠
- $\tau(s) := -\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$

定理 (フルネ・セレの公式；定理 4.2)

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right)$$

フルネ・セレの公式

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長パラメータ
- $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$：フルネ枠；$\kappa > 0$：曲率；$\tau$：捩率

定理 (フルネ・セレの公式；定理 4.2)

$$\boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n}' = -\kappa\boldsymbol{e} + \tau\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{b}' = -\tau\boldsymbol{n}.$$

フルネ・セレの公式（例題）

$$\boldsymbol{e}' = \kappa \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n}' = -\kappa \boldsymbol{e} + \tau \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{b}' = -\tau \boldsymbol{n}.$$

定理

捩率が恒等的に零である空間曲線は平面曲線である.

例：つるまき線（常螺線；helix）例5.6

$a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= {}^t\big(a\cos t, a\sin t, bt\big) \\ \tilde{\gamma}(s) &= {}^t\left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right) \qquad \left(c = \sqrt{a^2+b^2}\right) \\ &\Rightarrow \qquad \kappa = |a|/c^2, \quad \tau = b/c^2. \end{aligned}$$

例：ブーケの公式

系 (系 5.3; ブーケの公式)

$$
\begin{aligned}
\gamma(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0)\boldsymbol{e}_0 + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 \kappa_0 \boldsymbol{n}_0 \\
+ \frac{1}{6}(s - s_0)^3(-\kappa_0^2 \boldsymbol{e}_0 + \kappa_0' \boldsymbol{n}_0 + \kappa_0 \tau_0 \boldsymbol{b}_0) \\
+ o((s - s_0)^3) \quad (s \to s_0)
\end{aligned}
$$

例：ブーケの公式

- $\gamma(s_0)$ を通り，$\boldsymbol{e}(s_0)$，$\boldsymbol{n}(s_0)$ に平行な（$\boldsymbol{b}(s_0)$ に垂直な）平面を γ の s_0 における<u>接触平面</u>という．
- $\gamma(s_0)$ を通り，$\boldsymbol{n}(s_0)$，$\boldsymbol{b}(s_0)$ に平行な（$\boldsymbol{e}(s_0)$ に垂直な）平面を γ の s_0 における<u>法平面</u>という．
- $\gamma(s_0)$ を通り，$\boldsymbol{b}(s_0)$，$\boldsymbol{e}(s_0)$ に平行な（$\boldsymbol{n}(s_0)$ に垂直な）平面を γ の s_0 における<u>展直平面</u>という．

系 (系 5.4)

空間曲線 $\gamma(s)$ の像の，曲率が零でない点 $\gamma(s_0)$ における接触平面，展直平面への正射影は s_0 の近くで正則曲線を与える．一方，法平面のへの正射影は s_0 に特異点をもつ．

空間曲線の基本定理（次回予告）

定理 (空間曲線の基本定理)

区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 2 つの C^∞-級関数 κ, τ が与えられ, とくに $\kappa > 0$ が J 上で成り立っているとする．このとき，弧長によりパラメータづけられた C^∞-級の空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で，曲率，捩率がそれぞれ κ, τ となるものが存在する．さらにそのような曲線は変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$（$A \in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$）を除いて一意的である．

問題 5-1

問題

$$\gamma(s) = {}^t\left(\tan^{-1} s, \frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+s^2), s - \tan^{-1} s\right)$$

1. s は γ の弧長パラメータであることを確かめなさい.
2. γ の曲率と捩率を求めなさい.
3. s によらず γ の速度ベクトルと一定の角をなす単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求めなさい.

問題 5-2

問題

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長
- $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$：フルネ枠.
- $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s) + \lambda(s)\boldsymbol{n}(s)$ は次を満たす：
  - $\tilde{\gamma}(s)$ は正則曲線
  - $\tilde{\gamma}'$, $\tilde{\gamma}''$ は一次独立
  - $\tilde{\gamma}$ の従法線ベクトル $\tilde{\boldsymbol{b}}(s)$ は $\boldsymbol{n}(s)$ と平行

このとき

1. λ は零でない定数であることを示しなさい.
2. γ の曲率 κ, 捩率 τ および λ が満たす関係式を求めなさい.