

2022年11月10日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 5

■お知らせ

- 次回11月17日に「期末試験予告」をいたします。お誘い合わせの上ご出席ください。
- 40件/登録者53名の課題提出がありました。フィードバックはT2SCHOLA。

■前回の補足

- 問題4-1の答案の一部に「微積分があやふや」なものが複数見受けられました。 $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) = 0$ だからといって広義積分 $\int_{\infty}^{\infty} \varphi(s) ds$ は収束するとは限りません。
- 縮閉線からもとの曲線は決まるのか、という質問を複数いただきました。あたえられた曲線を縮閉線にもつ曲線をもとの曲線の伸開線といい、もとの曲線に対して一般に曲線の1パラメータ族として現れます。テキストの付録B-1参照。
- 縮閉線の特異点はどのような意味があるのか、という質問を複数いただきました。講義で言及しましたが、もとの曲線の曲率関数の微分が消える点が縮閉線の特異点になります。したがって頂点(曲率関数が極値を持つ点)は縮閉線の特異点に対応します。

■前回までの訂正

- 提出用紙のLuaLaTeXソースがdata/metadata.texがないという不具合がありましたので修正しました。

■授業に関する御意見

- 授業は理解している(と思っている)のですが、課題が数学力の乏しさからこなせません。単位がとれるか不安です。
山田のコメント: 試験があります!
- 3Qの授業が半分ほど終わり、だんだん試験が不安になってきました。毎回レポートの1問にとっても時間を使っているのに、試験で全く触れられずに終わる問題が出てくる気がして心配です。山田のコメント: 限られた時間の試験ですので、触れられないものも出てきます。申し訳ありませんがご容赦ください。過去問の存在はご存知ですよ。
- 講義の準備が大変だと聞いて、先生方の労力に見合うように勉強しなくてはいけないと身が引き締まる思いです。
山田のコメント: プレッシャーをかけてしまいましたか。申し訳ありません。準備は山田にとってそれほど大変ではないのですが、仕事が遅いのでTAに負担がかかっています。
- 先生の授業はこの難易度なのに、行っている操作の視覚的イメージがハッキリしていて、個人的にはとてもわかりやすいです。
山田のコメント: そんなに難しくないよね。
- 今回の問題からは次回が何の話なのか推測できない。想像力が足りていないのか... 山田のコメント: それでよいと思います。
- 録画も黒板も公開しているし、授業の進むスピードを落とさないためにも板書の速度は今のままでいいと思います。
山田のコメント: 了解。
- 録画のところどころ音声途切れているので、マイクの調子をご確認頂けたら幸いです。山田のコメント: 講義中にもコメントしましたが、どうもマイクの調子ではなく、ネットワークの問題のようです。気をつけます。
- goodnoteでは書類設定でツールの位置を上にするのと別のタブを開いてしまうのを防げると思います。
山田のコメント: おっしゃるとおりで通常は上にはしているのですが、画面をスクリーン上の高い位置におきたいために、講義のときだけツールを下にしています。みやすさを損なわないのであればツールを上にしてもよいと思いました。
- 講義資料に講義では扱っていないもの(winding numberなど)があったり口頭でちょっと説明されたものがちゃんと書いてあって勉強になった。山田のコメント: です。
- 最初に曲率の定義を見たときにはなにか「曲がっている率」なんだろうと思っていましたが、だんだんその意味が分かって来たような気がします。山田のコメント: 気がする、程度でよいと思います。
- クロノイド曲線については意外に身近で活用されていることを知り、この授業を受けて良かったと、改めて感じました。
山田のコメント: よかったでしょ。
- 今後も e, n の線形結合で表すことが多くなるとフルネ粋様様だと思った。山田のコメント: そうなの。
- 力づくで分からせるという言葉に感動しました! 僕も友達に勉強教えるときは力づくで分からせたいと思います!
山田のコメント: そんなところで感動しなくてよろしい。
- 次回以降の参考にするためにそれぞれの点数を書きいただきたいです。たとえば、1つ目の質問の評価が2点で、2つ目の質問の評価が3点だった場合、それぞれの点数が分かるように明記していただきたいです。
山田のコメント: 試みます。評価の対象となった項目に緑色で印をつけておきます。
- 今週は工大祭があって月曜日も休みだったので、期限が月曜の夜までだと嬉しかったです。
山田のコメント: なるほど、申し訳ない。せっかくの休みに課題では嫌がられるのではないかと思います。
- 授業に関するものではなく、山田先生個人にかかわる質問(例えば、好きな食べ物)は、こちらの感想、意見、希望の欄に記入したほうがよろしいでしょうか(メタ質問) 山田のコメント: はい。
- 特になし。山田のコメント: me, too.

質問と回答

- 質問 1: 弧長でないパラメータの縮閉線を考えることはありますか。 **お答え:** 定義は弧長パラメータを用いていない。
- 質問 2: 縮閉線のイメージはどのようなものですか。(曲率円ならば曲線に接する円のような)
- お答え:** イメージはあなた個人のものなのでなんとも言えない。曲率中心の軌跡(定義そのものだがそれもイメージの一つ)、曲線の法線族の包絡線(テキスト, 付録 B-1 参照)などの性質がありますが, それをイメージとよんでいい?
- 質問 3: 曲率の正負が入れ替わるときに縮閉線は発散し, 速度も無限大になりますが, そのような縮閉線でも $\dot{\sigma} \neq 0$ なら正則といえるのでしょうか。 **お答え:** 曲率が 0 になる点では縮閉線は定義されないで, $\dot{\sigma}$ も意味をもたない。
- 質問 4: 問題 4.1 で縮閉線を利用することで曲率の形から曲線の極限の存在がわかりましたが, 縮閉線を考えることのメリットは他にはありますか。 **お答え:** 「メリット」は立場によって違うと思うので, 応用例として, 頂点をあぶり出すことができる。テキスト付録 B-1 にさまざまな物語がある。あなたにメリットがあるかどうかは知らない。
- 質問 5: 問題 4.1 を解く過程の中の縮閉線の表式で $\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s))$ を用いると, 以下の式が得られました: $\sigma(s) = \gamma(s) + \frac{\gamma''(s)}{\det(\gamma'(s), \gamma''(s))}$. この式は, 縮閉線が与えられたときは, $\gamma(s)$ に関する非線形な微分方程式であると思わせるといえます。そこで, 一般に縮閉線 $\sigma(s)$ が与えられた時に, その縮閉線をもつ曲線が定まるかどうかということ, 適切な初期条件のもとで上の微分方程式が解けるかどうかということとは同値な命題となるのでしょうか。 **お答え:** s は σ でなく γ の弧長なので, $|\gamma'(s)| = 1$ という条件が未知関数 γ に課されることになるので, そのままでは同値でないはず。
- 質問 6: 1 次の接触のところで, $f'(0) = g'(0)$ 以外に $f(0) = g(0) = 0$ を加えて考えるのには, 2 次の接触とは違う考えがあるのででしょうか。 **お答え:** 2 次以上の接触の定義は 1 次の接触を前提としているので, 違う考えではない
- 質問 7: p 次の接触についての式「 $\frac{d^k f(0)}{dx^k} = \frac{d^k g(0)}{dx^k}$ ($k = 0, 1, \dots, p$)」は点 P が原点にあることを想定してつくられた式ですか。 **お答え:** はい。講義資料 4, 6 頁 3 行目の「この状況で」に注目。因みに $\frac{d^k f(0)}{dx^k}$ でなく $\frac{d^k f}{dx^k}(0)$ が適切。
- 質問 8: 正則平面曲線について, 曲率が 0 の部分はその接線で進向(原文ママ)方向が一致するものを曲率円と定義していましたが, レポート問題 3-2 のように考えれば曲率円の中心といえるものを見出すことができないので「定義されていない」としても良いのではないかと思いました。接線を曲率円とするメリットがあるのででしょうか。
- お答え:** テキスト 43 ページの定理 4.1 は曲率が 0 となる点でも成り立つ。あなたにとってメリットかは知らない。
- 質問 9: $\kappa = 0$ のとき曲率円は存在しないため, 接触についても考えないのでしょうか。
- お答え:** 曲率円は存在する。講義資料 4, 5 ページ, 下から 6 行目。
- 質問 10: 曲率円を考えると半径と曲率が逆数の関係になってある程度きれいな理論ができそうですけれど, 放物線などの他の図形によって二次の接触を起こすのは有益でしょうか。
- お答え:** はい, 考える問題によっては, 与えられた曲線と 2 次の接触をする放物線の焦点の軌跡はどんな図形?
- 質問 11: 2 次までのテイラー展開によって得られる 2 次関数も曲線と 2 次の接触をします。テイラー展開は次数を増やすと 3 次関数 4 次関数による接触が得られますが, 曲率円は 3, 4, ... 次接触に自然に拡張することができますか。
- お答え:** いいえ。一般には曲線に 3 次以上の接触をする円はありません。(あるとしたらその点で $\kappa = 0$)。ちなみに「2 次関数が接触する」のではなく「2 次関数のグラフが接触する」のですね。
- 質問 12: なぜ 2 次の接触を定義したのか考えてみました。曲率円の半径を c とすると曲率円の方程式は $(y-c)^2 + x^2 = c^2$ なので $y' = -\frac{x}{c\sqrt{1-x^2/c^2}}$, $y'' = (\text{略})$ であり, 円である以上 $y'(0) = 0$ でとってしまうので 2 次接触で円を 1 つに決めているのかなと考えました。先生はどうお考えでしょうか。
- お答え:** こういう議論をして 2 次の接触をする円は曲率円に限ることがわかります。
- 質問 13: C^∞ -級曲線をグラフ表示したとき Taylor 展開すればいくらかでも高次近似できるようにおもえますが, あえて円で近似するメリットは何でしょうか。 **お答え:** 曲率の意味がわかる(メリットかどうかは知らない)。
- 質問 14: 曲率円に関して, 平面曲線 $\gamma(t)$ と点 $P = \gamma(t_0)$ における曲率円は P において γ と 2 次の接触をするが, たとえば $y = x^2$ の原点における曲率円を考えたときに, $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$ とすると $f'''(0) = 0$, $g'''(0) = 0$ となり曲率円は $y = f(x)$ と原点において 3 次の接触をすると思うが 3 次の接触まで成り立つことが言えればなにか良いことはあるのでしょうか。 **お答え:** $\kappa' = 0$ が成り立つ。
- 質問 15: 曲線と 2 次の接触をする円は曲率円以外にありますか。また, 2 より高い次数の接触をする円は一般に存在しますか。 **お答え:** 前半: いいえ(証明を見ればわかる)。後半: $\kappa' = 0$ なら曲率円は曲線と 3 次以上の接触をする。
- 質問 16: 曲線上のある点に対する曲率円は一般にその点に対して二次の接触はしますが三次以上の接触はしません。曲

線に対して一般に三次の接触をするような曲線には円のように有名な曲線はありますか. **お答え:** 曲率円は頂点において 3 次の接触をします. 一般に, $\kappa \neq 0$ である点では, 補題 4.3 のように $y = f(x)$ とグラフ表示をして おいて, $g(x) = \frac{1}{2}\kappa(0)x^2 + \frac{1}{6}\kappa'(0)x^3$ のグラフと 3 次の接触をする (これが期待されている回答かはわかりませ んが).

質問 17: 2 次の接触では曲率円といううれしい対象を考えることができましたが, 3 次以上の接触で, 何か重要な情報 は得られますか? 予想としては, それ以上に強い近似はうれしくないのとくに意味はないのでは? と思ってい ます. **お答え:** 「うれしくない」のはなぜでしょう. たとえば曲線の頂点では曲率円と曲線が 3 次以上の接触をす る. テキスト §4 ではこの事実は積極的に利用しています.

質問 18: 補題 4.2 の証明で ${}^t(1, 0) = A^{-1}(\mathbf{e}(t_0) - \mathbf{a})$, ${}^t(0, 1) = A^{-1}(\mathbf{n}(t_0) - \mathbf{a})$ となる理由がわかりません.

お答え: 結論が間違っています. ${}^t(1, 0) = A^{-1}\mathbf{e}(t_0)$, ${}^t(0, 1) = A^{-1}\mathbf{n}(t_0)$. 実際 $\tilde{\gamma}$ の単位接ベクトルは $\tilde{\mathbf{e}}(t) := \tilde{\gamma}'(t) = \frac{d}{dt}(A^{-1}(\gamma(t) - \mathbf{a})) = A^{-1}\frac{d\gamma(t)}{dt} = A^{-1}\mathbf{e}(t_0)$.

質問 19: グラフ表示されていて $x < 0$ で $f(x) < 0$, $x > 0$ で $f(x) > 0$ であるような関数 $f(x)$ で曲率が (原文ママ: 関数 $f(x)$ のグラフで曲率が,) 0 でないものを考えてみましたが, テイラーの定理より $f(x) = 0 + 0 + \frac{f''(c)}{2}x^2$ ($0 < c < x$) とかけるので f'' の連続性より $f''(0) = 0$ となりますね. **お答え:** はい. $f'(0) = 0$ なら.

質問 20: グラフ表示とはいわゆる陽関数表示と同等なものですな? また, 陰関数定理は授業で示したものよりも一般 的な曲線に対し, 条件を満たす点を含む微小区間であればグラフ表示が可能になることを示す定理ですか?

お答え: 前半: 「いわゆる陽関数表示」が, 当方が考えているものと同じなら, はい. 後半: 第 7 回講義.

質問 21: グラフ表示する時, 関数ではない場合 ($f(x)$ が 2 つあるなど) は x の付近のみを考えれば良いのでしょうか?

お答え: この講義ではグラフ表示は「関数のグラフ表示」です.

質問 22: 弧長 s でパラメータづけられた平面曲線 $\gamma(s)$ に対して, ある点 $\gamma(s_0)$ とそれに十分近い 2 点を通る円の, 2 つの点を $\gamma(s_0)$ に近づけた極限として曲率円を考えることができるなら, 弧長 s でパラメータづけられた C^∞ -級 の空間曲線 $\gamma(s)$ に対して, ある点 $\gamma(s_0)$ で曲線と 3 次の接触をするような球を (半径を無限大とせざるを得ない 場合を含めて) 考えることはできますか? **お答え:** まず曲線と, 球面のような曲面が 3 次の接触をする, という ことをどう定義するか. 平面曲線と同様に, とは行きませんね. 平面曲線と同様に曲線上の 3 点を通る円 (これは \mathbb{R}^3 内でも意味がある) の極限として曲率円が定まります.

質問 23: 曲率円を空間曲線において考えたとき, 曲率円は一つに定まるように思うのですが曲率円が含まれる平面は単 位接線ベクトルと法線ベクトルを用いて表すことはできますか. **お答え:** 今回少し説明しますが, $\gamma(t_0)$ における 曲率円は, $\gamma(t_0)$ を通り接ベクトル $\mathbf{e}(t_0)$, 主法線ベクトル $\mathbf{n}(t_0)$ に平行な平面上の円です.

質問 24: “曲率円は曲線に最もよく接する円”がよく理解できなかったのもう 1 度説明をお願いしたいです.

お答え: これは「標語」であって命題ではないので理解できなければそれでよいです. 命題 4.6 のこと.

質問 25: トラクトリクスは特異点があるにもかかわらず全曲率が定義できますが, 定義できる場合とできない場合を分 けるものは何ですか. 特異点の多さなのか, それとも特異点がただ一つでもその性質によって全曲率が定義できな いこともあるのでしょうか. **お答え:** 後者. たとえば $\gamma(u) := e^{-1/u^2}(\cos \frac{1}{u}, \sin \frac{1}{u})$ ($u \neq 0$), $\gamma(0) := \mathbf{0}$ と定め ると, $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は C^∞ -級写像で, 原点に特異点をもつ曲線のパラメータ表示を与える. 原点の近くで単位接 ベクトルが無限回回転するので, 原点を含むどんなに小さい区間をとっても対応する全曲率は発散する^{*1}. なお, $\kappa ds = \frac{-1}{t^2} \frac{3t^2+4}{t^2+4} dt$ (s は弧長) であることから全曲率の発散がいえる.

質問 26: 問題 3-1 で質問です. $a > 1$ の場合の解答で $\gamma_a(t)$ に左から $(\frac{1}{0} \frac{0}{1/a})$ をかけていましたが, 何を考えてそのよ うな方針になったのですか. **お答え:** $(\sin t)(a + \cos t)$ ($a > 1$) は $a \rightarrow \infty$ で発散するが, $\frac{1}{a}(\sin t)(a + \cos t) = \sin t(1 + \frac{\cos t}{a})$ は $a \rightarrow \infty$ で $\sin t$ に収束する.

質問 27: 前回の課題の説明で $\gamma_a(t)$ と $(\frac{1}{0} \frac{0}{1/a})\gamma_a(t)$ が正則ホモトピー同値なのがわかりませんでした. $\cos t$ の係数を $1/a$ に変化させると言っていますが, 変化させてもその過程で $\gamma_a(t)$ と一致することがないと思います.

お答え: $u \in [0, 1]$ に対して $\sigma_u(t) := (\frac{1}{0} \frac{0}{(1-u)+u/a})\gamma_a(t)$ とおくと, $\sigma_0 = \gamma_a$, σ_1 はご質問の曲線となります.

質問 28: 問題 3-1 の $a \in (1, \infty)$ の解説で $\gamma_a(t)$ と ${}^t(\cos t, \sin t(1 + b \cos t))$ ($b = \frac{1}{a}$, $0 < b < 1$) が正則ホモトピー 同値であることから $b \rightarrow 0$ として円の全曲率と一致すると解説されていましたが, それは正則曲線をなめらかな 変形で移す C^∞ -級写像 σ_b に $b = 0$ を定義域に加えても C^∞ 級が保たれることから正当化されるということ でしょうか. **お答え:** 付け加えているわけではなく (i) $\gamma_a(t)$ ($1 < a < \infty$) 同士は互いに正則ホモトピー同値 (ii) $a \in (1, \infty)$ を一つ固定したとき, $\gamma_a(t)$ と ${}^t(\cos t, \sin t(1 + \frac{1}{a} \cos t))$ は正則ホモトピー同値 (iii) $b \in (0, 1)$ を一

*1 佐治・梅原・山田「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学」, 丸善出版, 2017 の 19 ページ.

- つ固定したとき ${}^t(\cos t, \sin t(1 + b \cos t))$ と ${}^t(\cos t, \sin t)$ は正則ホモトピー同値, という議論をしているつもり.
- 質問 29: $\gamma_a(t)$ のパラメータを変化させるとして $\gamma_{a_0}(t)$ は特異点をもつとする. そのとき $\gamma_{a_0}(t)$ の全曲率はその前後の平均値となるのですか? **お答え:** 一般論としてはなんとも言えません.
- 質問 30: 曲面を局所的に球で近似するというようなことはできますか. \mathbb{R}^3 の曲面に対して “曲率球” のようなものは考えられますか. **お答え:** いいえ. 4Q で説明します.
- 質問 31: 授業中に, 雑談か何かで 「地球の曲率」ということを仰っていたと思うのですが, これは地球の平面上の曲線 (例えば, 赤道) の曲率のことですか? もしくは, 曲面に対しても曲率が定義されるのですか. **お答え:** 後者. 4Q.
- 質問 32: 微分同相 (原文ママ: 微分同相?) に関して Φ に関して C^∞ だが Φ^{-1} で C^∞ でないということはあるのでしょうか. **お答え:** 「 Φ は C^∞ だが Φ^{-1} は C^∞ でない」? 講義資料 4, 6 ページ, 例 4.8 の 2 番目の例.
- 質問 33: 例 4.8 において, 2 つ目の例は逆写像が C^∞ -級じゃないから微分同相写像ではない, であっていますか/ 例 4.8 の 3, 4 つ目の解説が欲しい. **お答え:** はい/たぶん第 7 回.
- 質問 34: クロソイドについて質問なのですが, クロソイドの弧長パラメータ表示を求める際に表れる $\int_{s_0}^s \sin \frac{1}{2}u^2 du$, $\int_{s_0}^s \cos \frac{1}{2}u^2 du$ は初等関数で表されるのでしょうか. **お答え:** いいえ.
- 質問 35: クロソイド曲線の役立ち方やグラフについて調べました. 役立ち方: 緩和曲線として役立つ. グラフの形 (略)
お答え: Thanks. すこし活用例を見ましょう.
- 質問 36: 問題 4-1 で $\gamma(\infty) = \int_0^\infty {}^t(\cos \frac{s^2}{2}, \sin \frac{s^2}{2}) ds$ を求めた方が早いように思えますが, どうでしょうか.
お答え: 早く求まる? (覚えているならそれでもよい)
- 質問 37: 問題 4-2 の空間曲線 γ は C^∞ 級ということで良いのでしょうか. **お答え:** はい.
- 質問 38: 例 4.8 で定義域に开区間のみを用いているのに理由はありますか? たとえば 3 つめでは $(0, \infty) \times (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ としても問題ないように思います. **お答え:** 定義 4.7 を確認してください. 「領域」の定義は?
- 質問 39: n 次の接触を考えることによって, テイラーの定理のように曲線をグラフ表示された別の曲線で近似でき, 曲線が C^∞ -級ならテイラー展開のようなことができると思うのですが, これはテイラー展開という呼び方をしますのですか? **お答え:** 何を想定しているのかよくわかりません.
- 質問 40: ある関数と無限次の接触をしている関数は同じ関数とみなせますか? **お答え:** この講義では 「関数の接触」という概念を定義していませんが, 曲線の接触と思うことにすると: $f(x) := e^{-1/x^2}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$ とすると $f(x)$ は \mathbb{R} 全体で定義された C^∞ -級関数で, そのグラフは原点で x 軸と任意の次数の接触をする.
- 質問 41: $\sigma(s)$ の速度ベクトルは, 定義の両辺を微分して $1 - \frac{\kappa(s)}{\kappa(s)^2} \mathbf{n}(s)$ になると思ったのですが, 1 はどこに消えたのでしょうか? **お答え:** スカラとベクトルはどうやって足すのですか?
- 質問 42: $n (\in \mathbb{N})$ 個の点で $n (\in \mathbb{N})$ 次の接触をするような 2 つの曲線は存在しますか.
お答え: n と n は同じものを表していますか, それとも異なるものを表していますか?
- 質問 43: 射影空間は球面の対蹠点を同一したものとみなせるため, 球面と似ていると思います. 射影空間上の曲線を考えると, 問 4-2 のように $\gamma \cdot \gamma' = 0$ などの何か良い性質は成り立ちますか? **お答え:** 射影平面はご質問のような 「多様体」ですが, その点の 「位置ベクトル」は意味を持ちません.
- 質問 44: 平面曲線では曲率円を考えましたが, 3 次元の平面において曲率円のようなものは考えるのでしょうか? 素直に拡張するなら球面な気がしますが, うまくあてがうのは厳しそうな気がします.
お答え: 「3 次元の平面」とは? 球面と平面は接することはできるが 2 次近似はできませんね.
- 質問 45: 前回平面上の曲線の全曲率や回転数を定義しましたが, 空間上の曲面に対し (メビウスの輪のようなもの) ねじれの回数などを考えるようなことはありますか. **お答え:** メビウスの輪のねじれについては例えば <https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/207803>
- 質問 46: 全曲率を求める問題で, 全曲率が方向の変化であることを既知として, 積分計算をせずに図を書いて e の動きから答えを出しても試験では大丈夫ですか.
お答え: はい. 理由付けが不明確と当方が思った場合は不正解にすることがありますが, それに対してクレームをつけることは可能です. 書いてあるものから何をしたら判断できれば正解です.
- 質問 47: 今回シュワルツの不等式を利用する上で証明は必要でしたか. **お答え:** 「算数程度」なのでわれわれ (数学系の 2 年生) の文脈では不要ですが, もし 「なぜ」と聞かれれば当然証明できるべきです.

5 空間曲線

■フルネ・セレの公式 弧長によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma: \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}^3$ を考える.

$$\mathbf{e}(s) := \frac{d\gamma}{ds}(s), \quad \kappa(s) := \left| \frac{d\mathbf{e}}{ds}(s) \right| = \left| \frac{d^2\gamma}{ds^2}(s) \right|$$

と定めると, \mathbf{e} の大きさは 1, $\kappa: J \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ である. \mathbf{e} を γ の単位接ベクトル, κ を曲率と呼ぶ.

この節では以下 κ が零点をもたない, すなわち γ'' が零にならないとしておく. このとき

$$\mathbf{n}(s) := \frac{1}{|\gamma''(s)|} \gamma''(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d\mathbf{e}}{ds}(s), \quad \mathbf{b}(s) := \mathbf{e}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

と定め, \mathbf{n}, \mathbf{b} をそれぞれ γ の単位主法線ベクトル, 単位従法線ベクトルとよぶ. ただし “ \times ” は \mathbb{R}^3 のベクトル積を表す.

補題 5.1. ここまでの状況で, 各 s において $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ は \mathbb{R}^3 の正規直交基を与える. さらに $\mathcal{F} := (\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ と定めると, $\mathcal{F}: J \rightarrow \text{SO}(3)$ である.

補題 5.1 の \mathcal{F} を空間曲線 γ のフルネ枠という. とくに次で与えられる関数 τ を γ の振率という:

$$(5.1) \quad \tau(s) := -\frac{d\mathbf{b}}{ds}(s) \cdot \mathbf{n}(s).$$

定理 5.2 (フルネ・セレの公式). 弧長によりパラメータづけられた空間曲線 γ の加速度ベクトルが零とならないとき, そのフルネ枠を \mathcal{F} , 曲率, 振率をそれぞれ κ, τ とすると次が成り立つ:

$$(5.2) \quad \frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \quad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \right),$$

すなわち

$$(5.3) \quad \frac{d\mathbf{e}}{ds} = \kappa\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa\mathbf{e} + \tau\mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n}.$$

証明: 行列値関数 $\Omega = \Omega(t) = (a_{ij}(t))$ を $\Omega = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$ で定めるとフルネ枠 $\mathcal{F} = (\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ の各列ベクトルの微分は $\mathbf{e}' = a_{11}\mathbf{e} + a_{21}\mathbf{n} + a_{31}\mathbf{b}$, $\mathbf{n}' = a_{12}\mathbf{e} + a_{22}\mathbf{n} + a_{32}\mathbf{b}$, $\mathbf{b}' = a_{13}\mathbf{e} + a_{23}\mathbf{n} + a_{33}\mathbf{b}$ と書ける. κ と \mathbf{n} の定義から $a_{11} = a_{31} = 0$, $a_{21} = \kappa$, また振率の定義から $a_{23} = -\tau$. ここで \mathcal{F} は $\text{SO}(3)$ に値をとることから

$$\Omega = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}' = {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}' = ({}^t\mathcal{F}\mathcal{F}') - ({}^t\mathcal{F})'\mathcal{F} = (I)' - {}^t(\mathcal{F}\Omega)\mathcal{F} = -{}^t\Omega{}^t\mathcal{F}\mathcal{F}' = -{}^t\Omega.$$

すなわち Ω は交代行列なので結論を得る.

系 5.3 (ブーケの公式). 弧長によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma: \mathbb{R} \supset J \rightarrow \mathbb{R}^3$ の曲率が区間 J の内点 s_0 で零でないとする. このとき, s_0 を含む区間で γ のフルネ枠を $(\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, 曲率・振率をそれぞれ κ, τ として,

$$\mathbf{e}_0 := \mathbf{e}(s_0), \quad \mathbf{n}_0 := \mathbf{n}(s_0), \quad \mathbf{b}_0 := \mathbf{b}(s_0), \quad \kappa_0 := \kappa(s_0), \quad \tau_0 := \tau(s_0),$$

さらに $\kappa'_0 := \frac{d\kappa}{ds}(s_0)$ と書くとき,

$$\begin{aligned} \gamma(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0)\mathbf{e}_0 + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\kappa_0\mathbf{n}_0 + \frac{1}{6}(s - s_0)^3(-\kappa_0^2\mathbf{e}_0 + \kappa'_0\mathbf{n}_0 + \kappa_0\tau_0\mathbf{b}_0) \\ + o((s - s_0)^3) \quad (s \rightarrow s_0) \end{aligned}$$

が成り立つ.

点 $s = s_0$ において,

- $\gamma(s_0)$ を通り, $\mathbf{e}(s_0), \mathbf{n}(s_0)$ に平行な ($\mathbf{b}(s_0)$ に垂直な) 平面を γ の s_0 における**接触平面**という.
- $\gamma(s_0)$ を通り, $\mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)$ に平行な ($\mathbf{e}(s_0)$ に垂直な) 平面を γ の s_0 における**法平面**という.
- $\gamma(s_0)$ を通り, $\mathbf{b}(s_0), \mathbf{e}(s_0)$ に平行な ($\mathbf{n}(s_0)$ に垂直な) 平面を γ の s_0 における**展直平面**という.

系 5.4. 空間曲線 $\gamma(s)$ の像の, 曲率が零でない点 $\gamma(s_0)$ における接触平面, 展直平面への正射影は s_0 の近くで正則曲線を与える. 一方, 法平面への正射影は s_0 に特異点をもつ.

定理 5.5 (空間曲線の基本定理). 区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 2 つの C^∞ -級関数 κ, τ が与えられ, とくに $\kappa > 0$ が J 上で成り立っているとす. このとき, 弧長によりパラメータづけられた C^∞ -級の空間曲線 $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ で, 曲率, 捩率がそれぞれ κ, τ となるものが存在する. さらにそのような曲線は変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \mathbf{a}$ ($A \in \text{SO}(3), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$) を除いて一意である.

例 5.6 (つるまき線). ふたつの 0 でない定数 a, b に対して $\gamma(t) = {}^t(a \cos t, a \sin t, bt)$ とおく. 弧長パラメータで表示しなおすと,

$$\tilde{\gamma}(s) = {}^t \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c} \right) \quad \left(c = \sqrt{a^2 + b^2} \right).$$

したがって定義通りに計算すれば曲率, 捩率はそれぞれ $\kappa = |a|/c^2, \tau = b/c^2$ となる.

系 5.7. 曲率が正の定数, 捩率が零でない定数であるような空間曲線はつるまき線の一部に合同である.

問題

5-1 写像 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $\gamma(s) = {}^t \left(\tan^{-1} s, \frac{1}{\sqrt{2}} \log(1 + s^2), s - \tan^{-1} s \right)$ で与える.

- (1) s は γ の弧長パラメータであることを確かめなさい.
- (2) γ の曲率と捩率を求めなさい.
- (3) s によらず γ の速度ベクトルと一定の角をなす単位ベクトル \mathbf{v} を求めなさい.

5-2 弧長でパラメータづけられた空間曲線 $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ の曲率関数が零にならないとする. γ のフルネ枠を $(\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ とおき, J 上の C^∞ -級関数 λ に対して $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s) + \lambda(s)\mathbf{n}(s)$ が条件 (i) $\tilde{\gamma}$ は正則曲線, (ii) 各 $s \in J$ において $\tilde{\gamma}'(s), \tilde{\gamma}''(s)$ が一次独立 ($' = d/ds$), (iii) $\tilde{\gamma}(s)$ の単位従法線ベクトル $\tilde{\mathbf{b}}(s)$ は $\mathbf{n}(s)$ と平行, (iv) λ は零点をもたない. このとき

- (1) λ は零でない定数であることを示しなさい.
- (2) γ の曲率 κ , 捩率 τ および λ が満たす関係式を求めなさい.