幾何学概論第一 (MTH.B211)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/11/17

おしらせ

- 40 名から課題の提出がありました．受講登録者 53 名．
- 幾何学概論第一の講義は次回が最終回となります．
- 学修アンケートにご協力ください．T2SCHOLA から回答できます．

誤字・誤用ギャラリー：

- 2 次元の曲線，3 次元の曲線
  【$\mathbb{R}^2$ 内の曲線，$\mathbb{R}^3$ 内の曲線】【平面曲線，空間曲線】
- 利点・メリット・イメージ

期末試験予告 1/4

日時： 2022 年 12 月 1 日（木）**10 時 45 分〜12 時 15 分**

試験開始 5 分前には指定の座席に着席すること
（前日までに T2SCHOLA にて指示）

場所： **本館；H114** 　授業が行われている教室

範囲： 主として 11 月 24 日までの授業で扱った内容.

期末試験予告 2/4

持込： 紙媒体（ノート，教科書，参考書，メモ，計算用紙など）のみ持ち込み可.
持ち込んだものは試験室の机上におくこと．試験中に鞄などから取り出すことは不可.

禁止事項： 携帯電話・スマートフォン・糸電話，狼煙を見るための双眼鏡・パーソナルコンピュータ・スーパーコンピュータ・数学が得意な友人など，
紙媒体以外のもの，筆記用具，ティシュペーパーなどの必需品以外は持ち込み禁止.

期末試験予告 3/4

注意事項： やむを得ない理由で試験を受けられない方は，試験前までに電子メイルにて連絡．

連絡なしの欠席は単位を得る権利を失います．

答案は T2SCHOLA にて返却．

採点などへのクレイムは，期間を限って受け付ける．詳細は試験問題に．

発熱・体調不良の方は
公欠の可否にかかわらず
出校しないでください

期末試験予告 4/4

成績評価： 成績は試験と課題の得点から以下で決定する：
課題の得点の合計を x 点,
課題得点のクラス最大値を x_{max} 点,
試験の得点を y 点（$0 \leqq y \leqq 100$）として，評価点は

$$Z := 5 \times \left[\frac{z}{5}\right], \quad z := (1-p)\left(\frac{100x}{x_{\mathrm{max}}}\right) + py,$$
$$p := 0.3 + 0.7a$$

で与えられる Z と 100 のうち大きくない方.

係数 $a \in [0,1]$ は答案提出時に受講者が決める定数.

意見・要望など

- コロナなどで講義を公欠する場合でも課題は提出するべきでしょうか.
- 試験の満点は 100 点ですか？（去年の試験は 115 点満点だったようなので）
- これまでの課題の略解を配布して欲しいです.
- 数学系のこれまでの授業では，計算をすることにあまり重心がなかったので，計算力の大切さに受験以来に再認識させられています.（論理力も大事ですが）
- この授業の内容は代数などでも必要になってくるような内容ですか？

質問から

Q: かなり前の話ですが，課題 3-2 (2) がどうしても分かりません．$\frac{1}{\kappa}$ が全然でてこないです．

A: どの辺まで試みましたか？

Q: つるまき線や 5-2 の問題に出てくる $\tilde{\gamma}$ がよく分からないのでもう一度説明をお願いしたいです．

A: いずれもただの定義です．

質問から

Q: 曲率関数が弧長の r 乗に比例しているとき，その曲線が収束する r の下限は知られていますか？

A: 下限は 0. $r = 0$ だと収束しない．このことは $\sin x^{r+1}$, $\cos x^{r+1}$ の $[0, \infty)$ での積分の収束を考えればわかる．具体的な極限値は Γ 関数を用いて表される．

$$\int_0^\infty \cos s^{r+1}\, ds$$ が収束するか？

θ

質問から

$\mathbb{R}^3 : \mathbf{e},\ \mathbf{n} \qquad \mathbf{b} = \mathbf{e} \times \mathbf{n}$

高次元化

Q: 高次元化

$\mathbb{R}^3$

$$(x \times y) \cdot z = \det(x, y, z) \quad \text{for } \forall z$$

$\perp x,\ \perp y$

$2 = 3 - 1$

$\mathbb{R}^n$

$$(x_1 \times \cdots \times x_{n-1}) \cdot z$$

$$= \det(x_1 \cdots x_{n-1}, z) \quad \text{for } \forall z$$

軸性ベクトル

極性 ——

?

Frenet Serret $\quad \dfrac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$

一般化 $\quad n=4$

仮定 dim Span $\{\gamma' \ \gamma'' \ \gamma'''\} = 3$

$e_1 = \gamma'$ $\qquad \gamma' \perp \gamma''$ $\qquad e_1' = \kappa_1 e_2$

$e_2 = \dfrac{\gamma''}{|\gamma''|}$ $\qquad \kappa_1 = |\gamma''| > 0$

$\boxed{e_2' + \kappa_1 e_1} \neq 0$ $\qquad \left(\begin{array}{l} \perp e_2 \\ \perp e_1 \end{array} \right.$

κ_2

$e_3 = \boxed{} / |\boxed{}|$

$e_2' \cdot e_1 = -e_2 \cdot e_1'$

$= -\kappa_1$

$e_4 = e_1 \times e_2 \times e_3$

$\mathcal{F} = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)$

$n=3$

$\gamma'' \neq 0$

$(\perp \gamma')$

$\dim \mathrm{Span}\{\gamma' \gamma''\}$

$= 2$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & -\kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & -\kappa_3 \\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 \end{pmatrix}$$

κ_j : 第 j 曲率

$$\left(\begin{array}{l} \kappa_1 > 0 \\ \kappa_2 > 0 \\ \kappa_3 : \text{いろいろ} \end{array} \right)$$

講義

この後，短い休憩をとり，２つの「講義」を行います．

5 前回の復習

6 空間曲線の基本定理