幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/11/17

例：つるまき線（常螺線；helix）例5.6

$$\gamma(t) = {}^t\!\left(a\cos t, a\sin t, bt\right) \qquad (a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{R})$$

$$\dot\gamma(t) = {}^t\!\left(-a\sin t, a\cos t, b\right); \quad |\dot\gamma| = \sqrt{a^2+b^2} =: c; \quad \underline{s = ct} \quad \text{弧長}$$

$$\tilde\gamma(s) = {}^t\!\left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right) \leftarrow \text{弧長表示}$$

$$\boldsymbol{e}(s) = \frac{1}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c}, a\cos\frac{s}{c}, b\right), \qquad \boldsymbol{e}'(s) = \frac{a}{c^2}\left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\kappa(s) = \frac{|a|}{c^2}, \qquad \boldsymbol{n}(s) = -\frac{a}{|a|}\left(\cos\frac{s}{c}, \sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{b}(s) = \frac{-a}{|a|c}\left(b\sin\frac{s}{c}, -b\cos\frac{s}{c}, a\right), \quad \boldsymbol{b}'(s) = \frac{a}{|a|c^2}\left(b\cos\frac{s}{c}, b\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\tau(s) = \frac{b}{c^2}$$

例：つるまき線（常螺線；helix）例 5.6/6.7

$$\gamma(t) = {}^t\bigl(a\cos t, a\sin t, bt\bigr) \qquad (\in \mathbb{R}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{R})$$

$$\dot\gamma(t) = {}^t\bigl(-a\sin t, a\cos t, b\bigr); \quad |\dot\gamma| = \sqrt{a^2+b^2} =: c; \quad s = ct \quad \text{弧長}$$

$$\tilde\gamma(s) = {}^t\left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right)$$

$$\boldsymbol{e}(s) = \frac{1}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c}, a\cos\frac{s}{c}, b\right), \qquad \boldsymbol{e}'(s) = \frac{a}{c^2}\left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

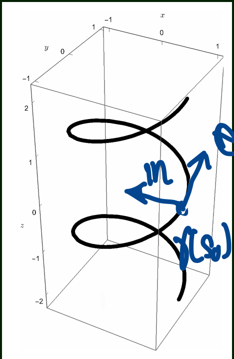
$$\kappa(s) = \frac{|a|}{c^2}, \qquad \boldsymbol{n}(s) = -\frac{a}{|a|}\left(\cos\frac{s}{c}, \sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{b}(s) = \frac{-a}{|a|c}\left(b\sin\frac{s}{c}, -b\cos\frac{s}{c}, a\right), \quad \boldsymbol{b}'(s) = \frac{a}{|a|c^2}\left(b\cos\frac{s}{c}, b\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\tau(s) = \frac{b}{c^2}$$

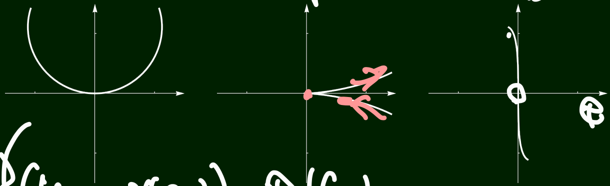
例：つるまき線（常螺線；helix）例 5.6/6.7

$$\gamma(t) = {}^t(a\cos t, a\sin t, bt)$$



$a = 1, b = \frac{1}{3}$

Span$\{n, b\}$ $\quad b$



$\left((\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot e(s_0) \right.$

$\left. (\qquad) \cdot n(s_0) \right)$

接触平面への射影　　法平面への射影　　展直平面への射影

Span$\{e(s_0), n(s_0)\}$ $\qquad$ Span$\{e, b\}$

フルネ・セレの公式；定理 6.5

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長パラメータ
- $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$：フルネ枠；$\kappa > 0$：曲率；$\tau$：捩率

$$\boldsymbol{e}' = \kappa \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n}' = -\kappa \boldsymbol{e} + \tau \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{b}' = -\tau \boldsymbol{n}.$$

系 (ブーケの公式；系 5.3) Taylor の定理

$\boldsymbol{e}_0 := \boldsymbol{e}(s_0)$, $\kappa_0 := \kappa(s_0)$, $\kappa_0' := \frac{d\kappa}{ds}(s_0)$, etc, $h := s - s_0$ と書くと

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + h\boldsymbol{e}_0 + \frac{1}{2}h^2\kappa_0\boldsymbol{n}_0 + \frac{1}{6}h^3(-\kappa_0^2\boldsymbol{e}_0 + \kappa_0'\boldsymbol{n}_0 + \kappa_0\tau_0\boldsymbol{b}_0) + o(h^3) \quad (h \to 0).$$

$$\gamma(s_0+h) = \gamma(s_0) + \gamma'(s_0)h + \frac{1}{2}\gamma''(s_0)h^2 + \frac{1}{6}\gamma'''(s_0)h^3 + o(h^3)$$

ブーケの公式

$\gamma' = e \qquad \gamma'' = \kappa n$

$\gamma''' = \kappa' n + \kappa n'$

$\qquad\qquad\quad '' \ -\kappa e + \tau b$

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + h\boldsymbol{e}_0 + \frac{1}{2}h^2\kappa_0\boldsymbol{n}_0 + \frac{1}{6}h^3(-\kappa_0^2\boldsymbol{e}_0 + \kappa_0'\boldsymbol{n}_0 + \kappa_0\tau_0\boldsymbol{b}_0) \\ + o(h^3) \quad (h \to 0).$$

- $s = s_0$ における接触平面 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{n}_0\}$ への正射影：

$$^t\left(h, \tfrac{1}{2}h^2\kappa_0\right) + o(h^2)$$

$y = ax^2$

- $s = s_0$ における法平面 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{b}_0\}$ への正射影：

cusp

$$^t\left(\underbrace{\tfrac{1}{2}h^2\kappa_0 + \tfrac{1}{6}h^3\kappa_0'}_{x}, \underbrace{\tfrac{1}{6}h^3\kappa_0\tau_0}_{y}\right) + o(h^3)$$

(t^2, t^3)

- $s = s_0$ における展直平面 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{e}_0\}$ への正射影：

$$^t\left(\underbrace{\tfrac{1}{6}h^3\kappa_0\tau_0}_{x}, \underbrace{h - \tfrac{1}{6}h^3\kappa_0^2}_{y}\right) + o(h^3)$$

$x = \frac{1}{6}\kappa_0\tau_0 y^3 + o(y^3)$

問題 5-1

問題

$$\gamma(s) = {}^t\left(\tan^{-1} s, \frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+s^2), s - \tan^{-1} s\right)$$

1. s は γ の弧長パラメータであることを確かめなさい．・
2. γ の曲率と捩率を求めなさい．
3. s によらず γ の速度ベクトルと一定の角をなす単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求めなさい．

$\kappa = \dfrac{\sqrt{2}}{1+s^2}$　　$\tau = \dfrac{\sqrt{2}}{1+s^2}$

v が γ' と定角を保つベクトル　定傾曲線の条件

$$v = p\,e + q\,n + r\,b \qquad \underline{|v| = 1}$$

$$\angle(v, e) = \cos^{-1} p \ (一定) \qquad p : \text{const.}$$

<u>v: 一定</u>

$$0 = \frac{dv}{ds} = p\,\underline{\underline{e'}} + q'\,n + q\,\underline{\underline{n'}} + r'\,b + r\,\underline{\underline{b'}}$$

(Frenet Serret)

$$= 0\,e + 0\,n + 0\,b$$

$\kappa = \tau$

$$\boxed{v = p\,e + p\,b} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(e + b)$$

問題 5-2

問題

Mannheim pair

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長
- $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$：フルネ枠.
- $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s) + \lambda(s)\boldsymbol{n}(s)$ は次を満たす：
  - $\tilde{\gamma}(s)$ は正則曲線
  - ~~$\tilde{\gamma}'$, $\tilde{\gamma}''$ は一次独立~~
  - $\tilde{\gamma}$ の従法線ベクトル $\tilde{\boldsymbol{b}}(s)$ は $\boldsymbol{n}(s)$ と平行

$\tilde{n}$

このとき

1. λ は零でない定数であることを示しなさい.
2. γ の曲率 κ, 捩率 τ および λ が満たす関係式を求めなさい.

$\lambda\kappa + \mu\tau = 1$

Bertland pair

✓ ☆ $\kappa - \lambda(\kappa^2 + \tau^2) = 0$ ($\kappa' \neq 0$)

$\tilde{\gamma} = \gamma + \lambda n$ $\quad \tilde{b} \parallel n$

λ : const

$\tilde{\gamma}' = \gamma' + \lambda' n + \lambda n'$

$= (1 - \kappa\lambda) e + \cancel{\lambda' n} + \tau\lambda b \parallel \tilde{e}$

$\perp \tilde{b} = \pm n \Rightarrow \lambda' = 0$

$\tilde{\gamma}'' = \bigcirc e + \bigcirc n + \bigcirc b$

$\mathrm{Span}\{\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}''\} = \mathrm{Span}\{\tilde{e}, \tilde{n}\} \perp \tilde{b}$

$\perp n$