幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/11/17

例：つるまき線（常螺線；helix）例5.6

$$\gamma(t) = {}^t\bigl(a\cos t, a\sin t, bt\bigr) \qquad (\in \mathbb{R}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{R})$$

$$\dot\gamma(t) = {}^t\bigl(-a\sin t, a\cos t, b\bigr); \quad |\dot\gamma| = \sqrt{a^2+b^2} =: c; \quad s = ct \quad \text{弧長}$$

$$\tilde\gamma(s) = {}^t\left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right)$$

$$\boldsymbol{e}(s) = \frac{1}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c}, a\cos\frac{s}{c}, b\right), \qquad \boldsymbol{e}'(s) = \frac{a}{c^2}\left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\kappa(s) = \frac{|a|}{c^2}, \qquad \boldsymbol{n}(s) = -\frac{a}{|a|}\left(\cos\frac{s}{c}, \sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{b}(s) = \frac{-a}{|a|c}\left(b\sin\frac{s}{c}, -b\cos\frac{s}{c}, a\right), \quad \boldsymbol{b}'(s) = \frac{a}{|a|c^2}\left(b\cos\frac{s}{c}, b\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\tau(s) = \frac{b}{c^2}$$

例：つるまき線（常螺線；helix）例 5.6/6.7

$$\gamma(t) = {}^t\big(a\cos t, a\sin t, bt\big) \qquad (\in \mathbb{R}\setminus\{0\}, b\in\mathbb{R})$$

$$\dot\gamma(t) = {}^t\big(-a\sin t, a\cos t, b\big); \quad |\dot\gamma| = \sqrt{a^2+b^2} =: c; \quad s = ct \quad \text{弧長}$$

$$\tilde\gamma(s) = {}^t\left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right)$$

$$\boldsymbol{e}(s) = \frac{1}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c}, a\cos\frac{s}{c}, b\right), \qquad \boldsymbol{e}'(s) = \frac{a}{c^2}\left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

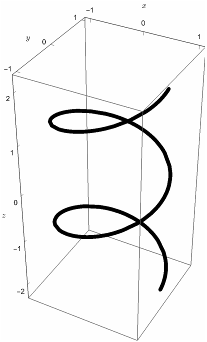
$$\kappa(s) = \frac{|a|}{c^2}, \qquad \boldsymbol{n}(s) = -\frac{a}{|a|}\left(\cos\frac{s}{c}, \sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{b}(s) = \frac{-a}{|a|c}\left(b\sin\frac{s}{c}, -b\cos\frac{s}{c}, a\right), \quad \boldsymbol{b}'(s) = \frac{a}{|a|c^2}\left(b\cos\frac{s}{c}, b\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

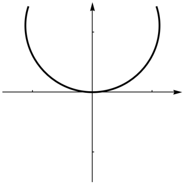
$$\tau(s) = \frac{b}{c^2}$$

例：つるまき線（常螺線；helix）例 5.6/6.7

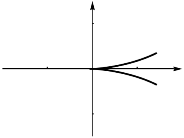
$$\gamma(t) = {}^t\!\left(a\cos t, a\sin t, bt\right)$$



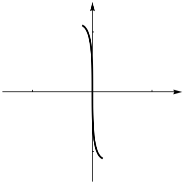
$a = 1, b = \frac{1}{3}$



接触平面への射影



法平面への射影



展直平面への射影

フルネ・セレの公式；定理6.5

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長パラメータ
- $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$：フルネ枠；$\kappa > 0$：曲率；$\tau$：捩率

$$\boldsymbol{e}' = \kappa\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n}' = -\kappa\boldsymbol{e} + \tau\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{b}' = -\tau\boldsymbol{n}.$$

系 (ブーケの公式；系 5.3)

$\boldsymbol{e}_0 := \boldsymbol{e}(s_0)$, $\kappa_0 := \kappa(s_0)$, $\kappa_0' := \frac{d\kappa}{ds}(s_0)$, etc, $h := s - s_0$ と書くと

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + h\boldsymbol{e}_0 + \frac{1}{2}h^2\kappa_0\boldsymbol{n}_0 + \frac{1}{6}h^3(-\kappa_0^2\boldsymbol{e}_0 + \kappa_0'\boldsymbol{n}_0 + \kappa_0\tau_0\boldsymbol{b}_0) + o(h^3) \quad (h \to 0).$$

ブーケの公式

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + h\boldsymbol{e}_0 + \frac{1}{2}h^2\kappa_0\boldsymbol{n}_0 + \frac{1}{6}h^3(-\kappa_0^2\boldsymbol{e}_0 + \kappa_0'\boldsymbol{n}_0 + \kappa_0\tau_0\boldsymbol{b}_0) + o(h^3) \quad (h \to 0).$$

- $s = s_0$ における接触平面 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{n}_0\}$ への正射影：

$$^t\left(h, \tfrac{1}{2}h^2\kappa_0\right) + o(h^2)$$

- $s = s_0$ における法平面 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{b}_0\}$ への正射影：

$$^t\left(\tfrac{1}{2}h^2\kappa_0 + \tfrac{1}{6}h^3\kappa_0', \tfrac{1}{6}h^3\kappa_0\tau_0\right) + o(h^3)$$

- $s = s_0$ における展直平面 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{e}_0\}$ への正射影：

$$^t\left(\tfrac{1}{6}h^3\kappa_0\tau_0, h - \tfrac{1}{6}h^3\kappa_0^2\right) + o(h^3)$$

問題 5-1

問題

$$\gamma(s) = {}^t\!\left(\tan^{-1} s, \frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+s^2), s - \tan^{-1} s\right)$$

1. s は γ の弧長パラメータであることを確かめなさい.
2. γ の曲率と捩率を求めなさい.
3. s によらず γ の速度ベクトルと一定の角をなす単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求めなさい.

問題 5-2

問題

- $\gamma(s)$：空間曲線；s：弧長
- $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$：フルネ枠.
- $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(s) + \lambda(s)\boldsymbol{n}(s)$ は次を満たす：
  - $\tilde{\gamma}(s)$ は正則曲線
  - $\tilde{\gamma}'$, $\tilde{\gamma}''$ は一次独立
  - $\tilde{\gamma}$ の従法線ベクトル $\tilde{\boldsymbol{b}}(s)$ は $\boldsymbol{n}(s)$ と平行

このとき

1. λ は零でない定数であることを示しなさい.
2. γ の曲率 κ, 捩率 τ および λ が満たす関係式を求めなさい.