幾何学概論第一 (MTH.B211)

空間曲線の基本定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/11/17

常微分方程式

$J \subset \mathbb{R}$：区間；$U \subset \mathbb{R}^n$：領域；$\boldsymbol{f}\colon J \times U \to \mathbb{R}^n$：$C^\infty$

- 常微分方程式の初期値問題

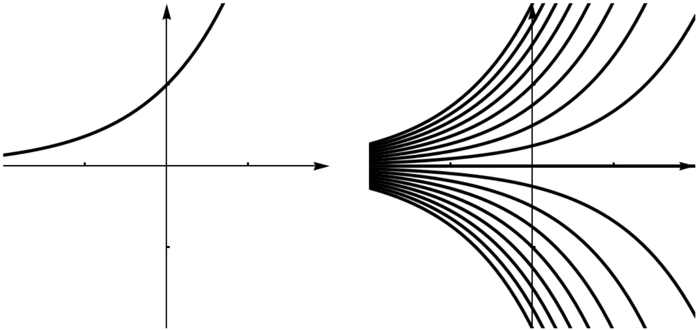
$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{f}(t; \boldsymbol{y}(t)), \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{a} \qquad (t_0 \in J, \boldsymbol{a} \in U) \qquad (*)$$

- 初期値問題 $(*)$ の解：$(*)$ を満たす関数 $\boldsymbol{y}\colon J' \to \mathbb{R}^n$
- 線形常微分方程式：$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{y}$ について 1 次式.

常微分方程式；例 6.2 (1)

- $n = 1$, $J = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}(t; y) = \alpha y$ (α は定数), $t_0 = 0$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y, \qquad y(0) = a$$



常微分方程式；例6.2 (2)；単振動

- $n=2$, $J=\mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}={}^t(x,y)$, $\boldsymbol{f}(t;x,y)={}^t(y,-k^2x)$（$k>0$ は定数），$t_0=0$，$\boldsymbol{a}={}^t(a,b)$

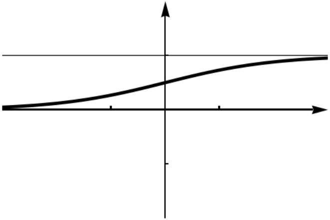
$$\frac{dx}{dt}=y,\qquad \frac{dy}{dt}=-k^2x,\qquad x(0)=a,\quad y(0)=b$$

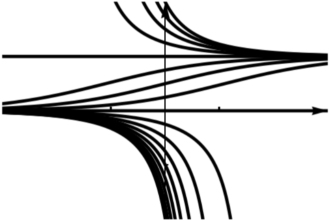
常微分方程式；例 6.2 (3)；ロジスティック方程式

- $n = 1,\ J = \mathbb{R},\ \boldsymbol{f}(t; y) = y(1-y),\ \ t_0 = 0,$

$$y' = y(1-y), \qquad y(0) = a$$

- 解：$y(t) = \dfrac{a}{a + (1-a)e^{-t}}$





常微分方程式；例 6.2 (4)；SIR モデル

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS}{dt} & = -\beta S I \\[2ex]
\dfrac{dI}{dt} & = \beta S I - \gamma I \\[2ex]
\dfrac{dR}{dt} & = \gamma I
\end{cases}
$$

常微分方程式の基本定理

$J \subset \mathbb{R}$：区間；$U \subset \mathbb{R}^n$：領域；$\boldsymbol{f}\colon J \times U \to \mathbb{R}^n$：$C^\infty$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{y}(t)), \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{a} \qquad (t_0 \in J, \boldsymbol{a} \in U) \qquad (*)$$

定理 (常微分方程式の基本定理；定理 6.1)

以上の状況で $\boldsymbol{f}\colon J \times U \to \mathbb{R}^n$ が C^∞-級ならば，t_0 を含む十分小さい区間 $J' \subset J$ 上で定義された初期値問題 ($*$) の C^∞-級の解がただ一つ存在する．

特に ($*$) が線形常微分方程式なら，解はJ 全体で定義された C^∞-級関数である．

空間曲線の基本定理

定理 (空間曲線の基本定理)

区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 2 つの C^∞-級関数 κ, τ が与えられ，とくに $\kappa > 0$ が J 上で成り立っているとする．このとき，弧長によりパラメータづけられた C^∞-級の空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で，曲率，捩率がそれぞれ κ, τ となるものが存在する．
さらにそのような曲線は変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$ $(A \in \mathrm{SO}(3),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$ を除いて一意的である．

問題 6-1

問題

弧長によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ と捩率 τ が，正の値を持つ s の C^∞-級関数 $\varphi(s)$ および定数 $\alpha \in [0, \pi/2)$ を用いて

$$\kappa(s) = (\cos\alpha)\varphi(s), \qquad \tau(s) = (\sin\alpha)\varphi(s)$$

と表されているとする．このとき，γ のフルネ枠 $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ に対して

$$\boldsymbol{u} := (\sin\alpha)\boldsymbol{e} + (\cos\alpha)\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{v} := (\cos\alpha)\boldsymbol{e} - (\sin\alpha)\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{w} := \boldsymbol{n}$$

とおいて $\mathcal{G} := (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ と書くことにする．

1. 各 s に対して $\mathcal{G}(s) \in \mathrm{SO}(3)$ であることを確かめなさい．
2. $\mathcal{G}' = \mathcal{G}\Lambda$ を満たす行列 Λ を求めなさい．
3. $\gamma(s)$ を φ と α を用いて表しなさい．

問題 6-2

問題

$\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\Sigma := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 2z - x^2 = 0\} \cap \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^4 + y^4 = 1\}$$

は「なめらかな空間曲線」を与える．この曲線上の点 ${}^t(1,0,1/2)$ における曲率を求めなさい.