2022 年 11 月 17 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 6

■お知らせ

- 40 件/登録者 53 名の課題提出がありました．フィードバックは T2SCHOLA.
- **学修アンケート**にご協力ください．T2SCHOLA から回答できます.

■定期試験予告　以下の要領で定期試験を行います：

日時： 2022 年 12 月 1 日（木）**10 時 45 分〜12 時 15 分**
試験開始 5 分前には指定の座席に着席すること；座席表は，前日までに T2SCHOLA に公開する

場所： **本館；H114** 授業が行われている教室

範囲： 主として 11 月 24 日までの授業で扱った内容.

持込： 紙媒体（ノート，教科書，参考書，メモ，計算用紙など）のみ持ち込み可．ただし，持ち込んだものは試験室の机上におくこと．試験中に鞄などから取り出すことは不可.

禁止事項： 携帯電話・スマートフォン・糸電話，狼煙を見るための双眼鏡・パーソナルコンピュータ・スーパーコンピュータ・数学が得意な友人など，紙媒体以外のものは持ち込み禁止.

注意事項：
- やむを得ない理由で**試験を受けられない方**は，**試験前**までに電子メイルにてご連絡ください.
- 連絡なしに試験を欠席された方は，**単位を得る権利を失います**.
- 答案は試験の翌週までに返却いたします．採点などに関するクレイムは，期間を限って受け付けます．詳細は試験問題に記します.

成績評価： 成績は**試験**と**課題**の得点から決定する．決定の方式は次の通り：課題の得点の合計を x 点（$0 \leqq x \leqq 30$），課題得点のクラス最大値を $x_{\max}$ 点，試験の得点を y 点（$0 \leqq y \leqq 100$）としたとき，

$$Z := 5 \times \left[\frac{z}{5}\right], \qquad z := (1-p)\left(\frac{100x}{x_{\max}}\right) + py, \qquad p := 0.3 + 0.7a$$

で与えられる Z と 100 のうち大きくない方を評価点とする．ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数，係数 $a \in [0,1]$ は**試験答案提出時に受講者自身が決める定数**である.

■誤字・誤用ギャラリー （【】内が正しい）

- 2 次元の曲線，3 次元の曲線【$\mathbb{R}^2$ 内の曲線，$\mathbb{R}^3$ 内の曲線】【平面曲線，空間曲線】

■前回の補足

- 平面曲線と空間曲線の曲率の定義が違うのはなぜかという疑問が複数ありました．違うわけではなく $\gamma'' = \kappa \boldsymbol{n}$ という式は平面曲線でも空間曲線でも成り立つのでこれを定義にしたいわけです.
- 捩率の幾何学的意味を問う質問が複数．前回示した「捩率が恒等的に零なら平面曲線」は幾何学的意味を与えていませんか．イメージは？ という問もありましたが，今回少し説明します.（それがあなたにとって「イメージ」と思えるかどうかは知りません.）
- $\mathbb{R}^3$ の曲線の曲率の定義が「非負」であることに関する疑問が複数ありました．平面曲線の曲率の定義では，先に $\boldsymbol{n}$（左向き単位法線ベクトル）が決まり，$\boldsymbol{e}' = \kappa \boldsymbol{n}$ となるように κ を決めています．空間曲線の単位接ベクトルに直交する方向はたくさんあり，単位法線ベクトルは一つに決まりません．そこで，加速度ベクトルに平行な単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とするのですが，その選び方はふた通り．そこで，そのうちどちらを選ぶか，という問題が生じます．ここでは加速度ベクトルの方向，すなわち $\gamma''/|\gamma''| = \boldsymbol{e}'/|\boldsymbol{e}'|$ をとることにしているので，自然に $\kappa = |\gamma''| \geqq 0$ となります.
- 空間曲線のフルネ・セレの方程式の高次元化はあるのか，というご質問が 10 件以上．次のように一般化されたフルネ枠を取ることができる：$\mathbb{R}^n$ の，弧長でパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ に対して (1) $\boldsymbol{e}_1(s) := \gamma'(s)$ とおく（単位接ベクトル）. (2) $\boldsymbol{e}_1'$ は $\boldsymbol{e}_1$ に直交する．ここで $\kappa_1(s) := |\boldsymbol{e}_1'(s)| (\geqq 0)$ とおき，以下 $\kappa_1 > 0$ と仮定する. (3) $\boldsymbol{e}_2 := \boldsymbol{e}_1'/\kappa_1$ とおく．$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は互いに直交する単位ベクトル．とくに $\boldsymbol{e}_1' = \kappa_1 \boldsymbol{e}_2$, $(\boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_1) = -\kappa_1$ がわかる. (4) $\boldsymbol{e}_2'$ は $\boldsymbol{e}_2$ に直交する．したがって $\boldsymbol{e}_2' + \kappa_1 \boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の両方に直交する．$\kappa_2 := |\boldsymbol{e}_2' + \kappa_1 \boldsymbol{e}_1| > 0$ を仮定し，$\boldsymbol{e}_3 := (\boldsymbol{e}_2' + \kappa_1 \boldsymbol{e}_1)/\kappa_2$ とおけば $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は正規直交系で，$\boldsymbol{e}_2' = -\kappa_1 \boldsymbol{e}_1 + \kappa_2 \boldsymbol{e}_3$ を満たす. (5) $\boldsymbol{e}_3'$ は $\boldsymbol{e}_3$ に直交するが，$\boldsymbol{e}_1$ にも直交する．実際 $\boldsymbol{e}_3' \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1' = -\kappa_1 \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$. そこで $\boldsymbol{e}_3' - \kappa_2 \boldsymbol{e}_2$ の大きさ κ_3 が零でないと仮定し，$\boldsymbol{e}_4 := (\boldsymbol{e}_3' - \kappa_2 \boldsymbol{e}_2)/\kappa_3$ とおく.
  これを続けることで，正の値をもつ関数 κ_j ($j = 1, \dots, n-2$) および正規直交系 $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}\}$ が得られ，$\gamma' = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1' = \kappa_1 \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_j' = -\kappa_{j-1} \boldsymbol{e}_{j-1} + \kappa_j \boldsymbol{e}_{j+1}$ ($j = 2, \dots, n-2$) を満たす．そこで $\operatorname{Span}\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n-1}\}$ に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_n$ で，$\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathrm{SO}(n)$ となるものをとると，$\boldsymbol{e}_{n-1}' = -\kappa_{n-2} \boldsymbol{e}_{n-2} + \kappa_{n-1} \boldsymbol{e}_n$ となる関数 κ_{n-1} をとることができる（正負いずれの符号もとりうる).
  以上のようにして得られた $\mathcal{F}$ をフルネ枠，κ_j を第 j 曲率という.

■前回までの訂正

- 講義資料 2, 7 ページ，命題 2.2 の証明 1 行目：$t \mapsto t(s) \Rightarrow s \mapsto t(s)$
- 講義資料 5, 5 ページ，11 行目：$\mathcal{F}\colon = \Rightarrow \mathcal{F}:=$

■授業に関する御意見

- コロナなどで講義を公欠する場合でも課題は提出するべきでしょうか．
  山田のコメント：いままで公欠された方は皆さん提出していたようです．特別扱いが必要な状況ならお知らせください．
- 試験の満点は 100 点ですか？（去年の試験は 115 点満点だったようなので）
  山田のコメント：満点は，小問の得点の合計と 100 のうち，大きくない方です．
- 3 次元の曲線は 2 次元のものよりも想像しづらいです．2 次元のときも十分複雑だったのに大変です．
  山田のコメント：曲線は 1 次元的な図形（1 次元多様体のユークリッド空間へのはめ込み）です．
- $\kappa(s) > 0$ の仮定は偉大ですね．　**山田のコメント：**強すぎますがね．
- この授業の内容は代数などでも必要になってくるような内容ですか？
  山田のコメント：経験上，思わぬところで関連していることが多くあるので，必要にならない，と断言はできません．
- これまでの課題の略解を配布して欲しいです．　**山田のコメント：**講義での説明が略解になっていると思います．最後の段階まで説明していないものあったかと思いますが，だれか埋めてください．
- 数学系のこれまでの授業では，計算をすることにあまり重心がなかったので，計算力の大切さに受験以来に再認識させられています．（論理力も大事ですが）　**山田のコメント：**きれいな論理が出来上がった背景にはたくさんの具体例の計算が隠されていることが多いですが，あまり表にはだしません．新しいことを考えるときは，最後は計算で倒すことが多いと思います．
- 今週も授業に出ている人がそれほど多くなかったように感じます．自分は授業に参加していても理解が追いつかないところばかりなので，余裕な人たちは少しうらやましいです．来週は試験予告があるので人が増える気がします．
  山田のコメント：増えますかねぇ．
- 課題の点数がいまいちで試験もすごくできることはないと思うので成績が不安です．　**山田のコメント：**ノーコメント
- 今日，立ち止まっちゃったら，明日走らなければいけない．毎日歩くのが一番　**山田のコメント：**そうなの？ 立ち止まってもいいじゃない．
- 高校（福岡県）の友人に鳥栖ジャンクションオタクがいたのを思い出しました．彼も形がすごいと言っていたので，今度会ったらクロソイドの講義をします．　**山田のコメント：**なるほど．
- 先生は女子枠を設けるのはどうしてだと思いますか？ 僕にはわかりません．
  山田のコメント：公式には言いにくいので，講義の休憩時間にでも．

質問と回答

質問 1：　平面曲線の縮閉線について，γ が閉曲線かつ曲率 κ の符号が曲線上の任意の点で変化しないならば、縮閉線も閉曲線になるでしょうか? またその逆は成り立つでしょうか?

お答え：　前半：縮閉線の定義式の各パーツは周期関数であるからあきらか．後半：テキスト 215 ページ，式 (B-1.2) 参照．

質問 2：　空間曲線についても $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす平面（接触平面）上の曲率円の中心を結ぶ曲線として縮閉線を定義できますか．　**お答え：**はい．

質問 3：　フルネ枠を考える利点は，フルネ・セレの公式の他に何がありますか？　**お答え：**曲線にそった枠を考えることで，$\mathbb{R}^3$ の回転・平行移動に依存しない曲線の性質を記述できる．これがあなたにとって利点かどうかは知らない．

質問 4：　ともに $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ を基とするベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 $\frac{d}{ds}\colon \boldsymbol{v} \mapsto \frac{d\boldsymbol{v}}{ds}$ による $\boldsymbol{e}$ の像が $0\boldsymbol{e}+\kappa\boldsymbol{n}+0\boldsymbol{b}$ $\to d/ds$ の表現行列の 1 列目が ${}^t(0, \kappa, 0)$（中略）であるから $\frac{d}{ds}\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\mathcal{F}$ となってほしいと思ったのですが，これは線形代数の考え方的に間違っているのでしょうか．　**お答え：**線形作用素 d/ds は $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像ではないですね．実際，一つの $\mathbb{R}^3$ の元（これはもちろん s によらない）に対して d/ds を施すと零写像？

質問 5：　フルネ枠を介さずに，フルネ・セレの公式を導くことは可能ですか．

お答え：　フルネ・セレの公式はフルネ枠の関係式ではないでしょうか．

質問 6：　曲線の一部分が直線の場合は，その部分ではフルネ枠は考えられないのでしょうか．それともカスプの曲率が与えられるときみたいに整合性の取れるフルネ枠みたいなものを取れるのでしょうか．　**お答え：**一部が直線でなくても 1 点で $\kappa = 0$ となることがありますね．($\kappa = 0$ となる点を変曲点という)．フルネ枠は変曲点をまたげませんが，問題に応じて別のフレームをとることもあります（さまざまな方法がありますが，ここでは紹介しません)．

質問 7：　弧長パラメータでなく，空間曲線の正則なパラメータ表示 $\gamma(t)$ に対して，κ, τ は平面曲線のときのように γ の t 微分で表すことができるのか（教科書に載っていたので解決しました)．

お答え：　はい．テキスト 55 ページですね．

質問 8： 弧長とは限らないパラメータで表される空間曲線 $\gamma(t)$ の曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$ はどのように求められるか（山田注：自己解決されています） **お答え：**はい.

質問 9： 2 次元での回転行列は（略）と表せるのが，3 次元の場合はどのようになるか.（調べたところ x, y, z の周りの 3 つの回転行列，そして任意の軸回りの回転行列．オイラー角による回転行列が存在することが分かった）

お答え： 第 1 回の講義で $\in \mathrm{SO}(3)$ の一つの固有値は 1 であって，その固有ベクトルを軸とする回転を表す，ということに言及しましたね.

質問 10： 平面曲線を空間曲線とみなして回転させると，平面での回転ではできなかったひっくり返すことができるようになりますが，同様に空間曲線を 4 次元曲線（原文ママ）とみなして回転させると鏡像に一致させたりできますか？ **お答え：**はい．$A \in \mathrm{O}(n-1)$ を $\det A = -1$ となる直交行列とするとき $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(n)$.

質問 11： 平面曲線でも空間曲線でも Ω が交代行列になることは偶然なのか．それとも意味があるのか.

お答え： 何回か口走りましたが，リー群 $\mathrm{SO}(n)$ のリー環（リー代数）は交代行列の集合.

質問 12： $\mathrm{SO}(3)$ のリー代数について考えてみました．リー代数の元を X とすると，$\exp(sX) \in \mathrm{SO}(3)$，よって ${}^t\exp(sX)\exp(sX) = I$. s で微分すると ${}^t(X\exp(sX)\exp(sX) + {}^t\exp(sX)(X\exp(sX)) = O \therefore {}^tX + X = O$. X は交代行列のなす群.

お答え： おしくも最後が誤り．$\mathrm{SO}(3)$ のリー代数は群ではなく，線形空間（に積が定義された多元環）になります.

質問 13： $\mathcal{F} \in \mathrm{SO}(n)$（$n \geqq 4$）においても $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\Omega$ となる Ω を作ることは可能でしょうか.

お答え： $\Omega := \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$ とおけばよい.

質問 14： 平面曲線で定義した曲率の絶対値をとれば（空間に埋め込まれた平面上の曲線として）今回の授業で定義された曲率と一致しますね． **お答え：**はい.

質問 15： 捩率は $-\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ と $\boldsymbol{n}$ の内積で，空間曲線の接触平面からの離れ具合を表していると言っていたが，$-\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \cdot \boldsymbol{e}$ の場合を接触平面からの離れ具合を表せるか． **お答え：**いいえ．ご質問の内積はフルネ・セレの公式から恒等的に 0.

質問 16： 曲率の正負でその曲線が左回りか右回りかが決まったように，捩率についても正負に図形的な性質はありますか？（定義などを見てなんとなく法平面における左回り，右回りのような気がしますが）

お答え： 射影をしてみましょう.

質問 17： 捩率とは図形的に何を表しているのでしょうか？ **お答え：**平面曲線からのずれ.

質問 18： 捩率について調べると「接平面との離れ具合」と書いてあったのですが，$\tau(s) = -\boldsymbol{b}(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$（原文ママ：これでは零ですね）でなぜ離れ具合を表せるのか分かりませんでした．また，曲率円のように捩率を図形的に表すものは存在しますか？ **お答え：**「調べると」はどこを調べたのでしょう．その前後に何が書いてありましたか？ ちなみに講義でも「接触平面との離れ具合」の話はしましたね．後半：講義で少し説明します.

質問 19： 捩率は 3 次元空間での立体的な広がりの度合いということですか？

お答え：「3 次元空間での立体的な広がりの度合い」という言葉が何を表しているのかわかりませんので回答できません.

質問 20： $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{n}$ の張る平面が曲線をよく近似する，というのがよくわかりませんでした．曲線と平面が接するということがイメージできません． **お答え：**曲線と平面が接するとは接線がその平面に含まれる（定義）．テイラー展開の 2 次の項までが接触平面に含まれる（もっともよく近似）．イメージはあとからついてくるのでこだわらないこと.

質問 21： 平面に収まる曲線は，真横から見ると直線になる．こういう見方がどの角度から見てもできない（直線にならない）曲線が捩れた曲線である，ということで合っていますか．そしてその平面からのずれ具合を表現するのに捩率が役に立つということですかね？ **お答え：**前半：証明を試みてみましょう．後半：そうですかね.

質問 22： 定理で，捩率が恒等的に 0 である場合は平面曲線であることの証明のキーは $\boldsymbol{b}'(s) = \mathbf{0}$ より $\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{b}$ (const) となることである．なので，$\boldsymbol{b}(s)$ が恒等的に $(0,0,0)$ のときも同じ証明方法で平面曲線であると言えるはずであるが（以下略） **お答え：**定義から $\boldsymbol{b}$ は単位ベクトルなので零ベクトルにはなりません.

質問 23： 空間曲線の場合の，曲率・捩率が与えられたときの弧長によりパラメータづけられた曲線の具体的表示はどのようなものですか？ **お答え：**「ありません」．具体的に表示できる特別な場合が今回の演習問題.

質問 24： 一般に $a, b \in \mathbb{R}^n$ に対して $a \times b \in \mathbb{R}^n$ を定義できるか．また $a \cdot (a \times b) = b \cdot (a \times b) = 0$ か.

お答え： できない．実際，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 両方に直交するベクトル全体は一般には $n-2$ 次元ベクトル空間をなす.

質問 25： 曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ に関してある点 $s_0 \in \mathbb{R}$ をとると，$\gamma(s_0)$ をとおり $\boldsymbol{b}(s_0)$ に垂直な平面が決まり，γ のその平面への正射影が決まりますが，正射影を指定することで正則曲線を定めることができるのでしょうか．また，それは等長変換を除いて一意でしょうか.

お答え： 一つの平面への正射影からは空間曲線は決まりません（情報が足りない）.

質問 26： 今回の問題 5-1 のように曲率が正であるような γ に対して γ' と一定の角をなす一定のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が存在するような条件を考えてみました．s を γ のの弧長パラメータとします．「$\boldsymbol{e}(s)\cdot\boldsymbol{v}(s)$ を微分したものが 0 になるので $\kappa(s)>0$ から $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$ となる．$\boldsymbol{e}(s)$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角を θ とすると $\boldsymbol{v}=\cos\theta\boldsymbol{e}(s)+\sin\theta\boldsymbol{b}(s)$ と表せて，これをさらに微分して Frenet-Serret の公式から $\kappa\cos\theta-\tau\sin\theta=0$ が導かれて $\tau/\kappa=\cot\theta=\mathrm{const.}$ となる．逆に $\tau/\kappa=\cot\theta=\mathrm{const.}$ と定めて $\boldsymbol{v}=\cos\theta\boldsymbol{e}(s)+\sin\theta\boldsymbol{b}(s)$ とすると $\boldsymbol{v}'=(\kappa\cos\theta-\tau\sin\theta)\boldsymbol{n}=0$ となる．以下略．だいたいこのような流れで $\tau/\kappa=\mathrm{const.}$ がの速度ベクトルと一定の角をなすような定ベクトル場が存在するための必要十分条件であることは証明できていますか． **お答え：**はい．

質問 27： 今回の課題 5-1 において，s によらず γ の速度ベクトルと一定の角をなす単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求めるのにキーとなったのは，曲率と捩率が等しいという事実であったと思います．このような例は，問題で与えられた曲線の他にも，講義で触れたつるまき線 (例 5.6) でも $|a|=b$ を満たすようにとることで実現できます．よって，同じように $\boldsymbol{v}$ を求められます．そこで，このようなベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在することは曲線として何か特別な特徴を与えているのでしょうか．問題で与えられた曲線はプロットしてみると U 字型に曲げた針金のようになり，（図省略）見た目としてはつるまき線との図形的なつながりは見えてきませんでした．

お答え： 定傾曲線という曲線のクラスです．講義で説明します．

質問 28： 曲率関数が弧長の r 乗に比例しているとき，その曲線が収束する r の下限は知られていますか？

お答え： 数値計算などで試してみましたか？ $r=1$ なら収束ですが $r>0$ のときも広義積分は収束しそうですね．したがって下限は 0（$r=0$ では発散）．積分の値はガンマ関数を用いて表されますが，求め方は $r=1$ の場合と同様（コーシーの積分定理を用いる）．

質問 29： かなり前の話ですが，課題 3-2 (2) がどうしても分かりません．$\frac{1}{\kappa}$ が全然でてこないです．

お答え： どの辺まで試みましたか？

質問 30： つるまき線や 5-2 の問題に出てくる $\tilde{\gamma}$ がよく分からないのでもう一度説明をお願いしたいです．

お答え： いずれもただの定義です．

質問 31： 空間曲線の基本定理の証明（平面曲線の基本定理を真似て書いてみました）（山田注：証明略）

お答え： 今回説明します．

質問 32： 単位従法線ベクトルや捩率がフルネ・セレの公式にあまりにも上手く噛み合っているように感じられ，フルネ・セレの公式が成り立つように単位従法線ベクトルや捩率を定義しているようにも思ってしまったのですが，フルネ・セレの公式と単位従法線ベクトルや捩率の概念はどちらが先に出てきたのでしょうか．

お答え： 歴史的経緯はわかりませんが，ひと続きの文脈です．

質問 33： なぜ，ブーケの公式で 4 次以降は無視される (?) のでしょうか？

お答え： 無視されるのでなく無視した．捩率が零でないとき，接触平面，法平面，展直平面への正射影のテイラー展開の最初の項が たかだか 3 次だから．

質問 34： 問題 5-1 で扱った曲線には，何か名前がついていますか？

お答え： 山田は知りません．

質問 35： 恒等的に零とは単に零であると同じですか．

お答え：「単に零」とは？ 関数 f が恒等的に零とは，f の定義域のすべての x に対して $f(x)=0$ となること．

質問 36： 空間でも回転数などは定義できるのでしょうか？

お答え： いいえ．第 5 回講義資料，質問 11 参照．

6 空間曲線の基本定理

■線形常微分方程式 一般に，区間 $J \subset \mathbb{R}$ と領域 $U \subset \mathbb{R}^n$ の直積上で定義された写像 $\boldsymbol{f}\colon J \times U \to \mathbb{R}^n$ に対して，関係式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{y}(t)), \qquad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{a} \in U) \tag{6.1}$$

を，$\boldsymbol{y}(t)$ を未知関数とする（正規形の）**常微分方程式**の初期値問題，$\boldsymbol{a}$ を**初期条件**という．ただし $t_0 \in J$ は区間 J 上の固定された点である．区間 J に含まれ，t_0 を含む区間 J' で定義された関数 $\boldsymbol{y}\colon J' \to \mathbb{R}^n$ が (6.1) を満たすとき，これを初期値問題 (6.1) の**解**という．さらに $\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{y}$ の各成分について一次式であるとき，(6.1) は**線形常微分方程式**という．

定理 6.1 (常微分方程式の基本定理)**.** 以上の状況で $\boldsymbol{f}\colon J \times U \to \mathbb{R}^n$ が C^∞-級ならば，t_0 を含む十分小さい区間 $J' \subset J$ 上で定義された初期値問題 (6.1) の C^∞-級の解がただ一つ存在する．とくに (6.1) が**線形常微分方程式**であるとき，解は J **全体で定義された** C^∞-級関数である．

/(a+)

例 6.2.
- $n = 1$, $J = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}(t;y) = \alpha y$ (α は定数)，$t_0 = 0$ とする．このとき，(6.1) は $y' = \alpha y$, $y(0) = a$（a は実数）と書ける．$y(t) = a\exp(\alpha t)$ はこの初期値問題の $J = \mathbb{R}$ 上で定義された解である．
- $n = 2$, $J = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y} = {}^t(x,y)$, $\boldsymbol{f}(t;x,y) = {}^t(y, -k^2x)$（$k > 0$ は定数），$t_0 = 0$，$\boldsymbol{a} = {}^t(a,b)$ とする．このとき (6.1) は $x' = y$, $y' = -k^2x$, $x(0) = a$, $y(0) = b$ となる．これはフックの法則に従う力のもとでの運動方程式 $y'' = -k^2y$ を (6.1) の形に表したものであり，$k \neq 0$ のとき $x(t) = a\cos kt + (b/k)\sin kt$ は $J = \mathbb{R}$ 上で定義された解である．
- $n = 1$，$J = \mathbb{R}$，$\boldsymbol{f}(t;y) = y(1-y)$，$t_0 = 0$ とすると (6.1) は $y' = y(1-y)$，$y(0) = a$（$a \in \mathbb{R}$）[*1]．$y(t) = \frac{a}{a+(1-a)e^{-t}}$ は解である．$a \in [0,1]$ のとき y は $J = \mathbb{R}$ 全体で定義されるが，それ以外の a では $\mathbb{R}$ 全体で定義されない．
- $n = 3$, $J = \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}(t,S,I,R) = {}^t(-\beta SI, \beta SI - \gamma I, \gamma I)$，$(\beta,\gamma)$ は $0 < \beta, \gamma < 1$ なる定数[*2]．

■フルネの公式と平面曲線の基本定理（復習） 弧長 s によりパラメータづけられた平面曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^2$ に対して[*3] 単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s)$ と左向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ をとり，それらを並べた $\mathcal{F}(s) := (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s))\colon J \to \mathrm{SO}(2)$ を**フルネ枠**という．このとき，**フルネの公式**

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds}(s) = \mathcal{F}(s)\Omega(s) \qquad \Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

が成り立つ．ここで $\kappa(s)$ は曲線 γ の**曲率**とよばれる関数である．

定理 6.3 (平面曲線の基本定理)**.** 区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上の C^∞-級関数 $\kappa(s)$ に対して，弧長でパラメータづけられた C^∞-級平面曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ で曲率が $\kappa(s)$ となるものが，変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$（$A \in \mathrm{SO}(2)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$）を除いて

2022 年 11 月 17 日

[*1] この方程式を**ロジスティック方程式**とよぶ．

[*2] SIR model, Kermack-MaKendric, 1927.

[*3] とくに断らない限り曲線のパラメータ表示などは C^∞-級であるとしておく．

一意に存在する．

証明は第 2 回講義ですでに与えているが，ここでは具体的な表示

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} {}^t\bigl(\cos\theta(u), \sin\theta(u)\bigr)\,du, \qquad \theta(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(u)\,du$$

を用いない証明を与える．

証明．与えられた $\kappa(s)$ に対して (6.2) は行列 $\mathcal{F}$ の 4 つの成分を未知関数とした線形常微分方程式である．とくに $s_0 \in J$ を固定して初期条件 $\mathcal{F}(s_0) = A \in \mathrm{SO}(2)$ を満たす解を $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$ と書く．$\mathcal{F}$ が (6.2) を満たすなら $A\mathcal{F}$ も同じ方程式を満たすので，初期条件を比較することで $\mathcal{F}_A = A\mathcal{F}_I$ が成り立つ．ただし I は単位行列．とくに $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$ は

$$\frac{d}{ds}(\mathcal{F}^t\mathcal{F}) = \mathcal{F}(\Omega + {}^t\Omega)^t\mathcal{F} = O$$

を満たすので $\mathcal{F}^t\mathcal{F}$ は s によらない定行列．$A \in \mathrm{SO}(2)$ だから $\mathcal{F}(s)^t\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(s_0)^t\mathcal{F}(s_0) = A^tA = I$．したがって $\mathcal{F}(s)$ は直交行列．さらに $\det\mathcal{F}(s)$ は ±1 なので，$\mathcal{F}$ の連続性により s によらない定数．とくに $A \in \mathrm{SO}(2)$ より $\det\mathcal{F}(s) = 1$．以上より C^∞-級写像 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A\colon J \to \mathrm{SO}(2)$ が得られた．
存在：$\mathcal{F}(s) := \mathcal{F}_I(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s))$ と書き，$\gamma_0(s) := \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{e}(u)\,du$ とおけば，γ_0 が求めるものである．
一意性：曲線 γ の曲率が κ であるとすると，γ のフルネ枠 $\mathcal{F}_\gamma$ は (6.2) を満たす．とくに s_0 において $\mathcal{F}_\gamma(s_0) = A \in \mathrm{SO}(2)$ とすると，解の一意性から $\mathcal{F}_\gamma = \mathcal{F}_A$．存在の証明で得られた初期条件 $\mathcal{F}(s_0) = I$ を満たす解 $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}_A := A\mathcal{F}$ とおくと $\mathcal{F}_A$ は (6.2) の初期条件 $\mathcal{F}_A(s_0) = A$ を満たす解．したがって $\mathcal{F}_\gamma = \mathcal{F}_A = A\mathcal{F}_I$，とくに $\gamma' = A\gamma_0'$ なので $\gamma = A\gamma_0 + \boldsymbol{a}$． □

■空間曲線の基本定理　弧長によりパラメータづけられた空間曲線 $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^3$ を考える．

$$\boldsymbol{e}(s) := \frac{d\gamma}{ds}(s), \qquad \kappa(s) := \left|\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s)\right| = \left|\frac{d^2\gamma}{ds^2}(s)\right|$$

と定めると，$\boldsymbol{e}$ の大きさは 1，$\kappa\colon J \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ である．$\boldsymbol{e}$ を γ の**単位接ベクトル**，κ を**曲率**と呼ぶ．

この節では以下 κ が零点をもたない，すなわち γ'' が零にならないとしておく．このとき

$$\boldsymbol{n}(s) := \frac{1}{|\gamma''(s)|}\gamma''(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\boldsymbol{e}}{ds}(s), \qquad \boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$$

と定め，$\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ をそれぞれ γ の**単位主法線ベクトル**，**単位従法線ベクトル**とよぶ．ただし “$\times$” は $\mathbb{R}^3$ の**ベクトル積**を表す．

補題 6.4. ここまでの状況で，各 s において $\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基を与える．さらに $\mathcal{F}\colon = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ と定めると，$\mathcal{F}\colon J \to \mathrm{SO}(3)$ である．

補題 6.4 の $\mathcal{F}$ を空間曲線 γ の**フルネ枠**という．とくに次で与えられる関数 τ を γ の**捩率**という：

$$\tau(s) := -\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}(s) \cdot \boldsymbol{n}(s). \tag{6.3}$$

定理 6.5 (フルネ・セレの公式（再録）)**.** 弧長によりパラメータづけられた空間曲線 γ の加速度ベクトルが零とならないとき，そのフルネ枠を $\mathcal{F}$，曲率，捩率をそれぞれ κ, τ とすると次が成り立つ：

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega \qquad \left(\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\right). \tag{6.4}$$

証明. フルネ枠 $\mathcal{F}$ は直交行列に値をとるので，$\mathcal{F}^{-1} = {}^t\mathcal{F}$．そこで $\Omega := \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}'$ $(' = d/ds)$ とおくと，

$$ {}^t\Omega = {}^t\left({}^t\mathcal{F}\mathcal{F}'\right) = {}^t\mathcal{F}'{}^t{}^t\mathcal{F} = ({}^t\mathcal{F})'\mathcal{F} = ({}^t\mathcal{F}\mathcal{F})' - {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}' = -\Omega, $$

すなわち Ω は交代行列．そこで $\Omega = \Omega(t) = (a_{ij}(t))$ と書くと，フルネ枠 $\mathcal{F} = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ の各列ベクトルの微分は $\boldsymbol{e}' = a_{11}\boldsymbol{e} + a_{21}\boldsymbol{n} + a_{31}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}' = a_{12}\boldsymbol{e} + a_{22}\boldsymbol{n} + a_{32}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}' = a_{13}\boldsymbol{e} + a_{23}\boldsymbol{n} + a_{33}\boldsymbol{b}$ と書ける．κ と $\boldsymbol{n}$ の定義から $a_{11} = a_{31} = 0$, $a_{21} = \kappa$，また捩率の定義から $a_{23} = -\tau$．ここで $a_{13} = 0$, $a_{22} = a_{33} = 0$, $a_{12} = -\kappa$, $a_{32} = \tau$ となり，結論が得られた． □

平面曲線の基本定理の証明と全く同じ方法で，以下が得られる：

定理 6.6 (空間曲線の基本定理)**.** 区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 2 つの C^∞-級関数 κ, τ が与えられ，とくに $\kappa > 0$ が J 上で成り立っているとする．このとき，弧長によりパラメータづけられた C^∞-級の空間曲線 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^3$ で，曲率，捩率がそれぞれ κ, τ となるものが存在する．さらにそのような曲線は変換 $\gamma \mapsto A\gamma + \boldsymbol{a}$ $(A \in \mathrm{SO}(3), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3)$ を除いて一意的である．

例 6.7 (つるまき線)**.** ふたつの 0 でない定数 a, b に対して $\gamma(t) = {}^t\left(a\cos t, a\sin t, bt\right)$ とおく（例 5.6 参照）．弧長パラメータで表示しなおすと，

$$ \tilde{\gamma}(s) = {}^t\left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right) \qquad \left(c = \sqrt{a^2+b^2}\right). $$

したがって定義通りに計算すれば曲率，捩率はそれぞれ $\kappa = |a|/c^2$, $\tau = b/c^2$ となる．

系 6.8. 曲率が正の定数，捩率が零でない定数であるような空間曲線はつるまき線の一部に合同である．

問題

6-1 弧長によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ と捩率 τ が，正の値を持つ s の C^∞-級関数 $\varphi(s)$ および定数 $\alpha \in [0, \pi/2)$ を用いて

$$ \kappa(s) = (\cos\alpha)\varphi(s), \qquad \tau(s) = (\sin\alpha)\varphi(s) $$

と表されているとする．このとき，γ のフルネ枠 $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ に対して

$$ \boldsymbol{u} := (\sin\alpha)\boldsymbol{e} + (\cos\alpha)\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{v} := (\cos\alpha)\boldsymbol{e} - (\sin\alpha)\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{w} := \boldsymbol{n} $$

とおいて $\mathcal{G} := (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ と書くことにする．

(1) 各 s に対して $\mathcal{G}(s) \in \mathrm{SO}(3)$ であることを確かめなさい．

(2) $\mathcal{G}' = \mathcal{G}\Lambda$ を満たす行列 Λ を求めなさい．

(3) $\gamma(s)$ を φ と α を用いて表しなさい．

6-2 $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$ \Sigma := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 2z - x^2 = 0\} \cap \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^4 + y^4 = 1\} $$

は「なめらかな空間曲線」を与える．この曲線上の点 ${}^t(1, 0, 1/2)$ における曲率を求めなさい．