幾何学概論第一 (MTH.B211)

陰関数定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/11/24

問題 6-1

問題

弧長によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ と捩率 τ が，正の値を持つ s の C^∞-級関数 $\varphi(s)$ および定数 $\alpha \in [0, \pi/2)$ を用いて

$\frac{\tau}{\kappa} = (一定)$

問題5-1

$$\kappa(s) = (\cos\alpha)\varphi(s), \qquad \tau(s) = (\sin\alpha)\varphi(s)$$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$　$\varphi = \frac{2}{1+s^2}$

と表されているとする．このとき，γ のフルネ枠 $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$

$$\boldsymbol{u} := (\sin\alpha)\boldsymbol{e} + (\cos\alpha)\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{v} := (\cos\alpha)\boldsymbol{e} - (\sin\alpha)\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{w} := \boldsymbol{n}$$

Frenet 枠でない

とおいて $\mathcal{G} := (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ と書くことにする．

1. 各 s に対して $\mathcal{G}(s) \in \mathrm{SO}(3)$ であることを確かめなさい．
2. $\mathcal{G}' = \mathcal{G}\Lambda$ を満たす行列 Λ を求めなさい．
3. $\gamma(s)$ を φ と α を用いて表しなさい．

$$\underset{\substack{\uparrow \\ SO(3)}}{\overset{g}{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}} = \underset{\substack{\mathcal{F} \\ \uparrow \\ SO(3)}}{(\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b})} \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \end{pmatrix}}_{B \in SO(3)}$$

$$\boxed{g = \mathcal{F} B}$$

Frenet Serret

$$\mathbf{u}' = \sin\alpha\, \mathbf{e}' + \cos\alpha\, \mathbf{b}' = \sin\alpha(\kappa \mathbf{n}) + \cos\alpha(-\tau \mathbf{n})$$

$$= (\kappa \sin\alpha - \tau\cos\alpha)\mathbf{n} = (\cos\alpha \cdot \varphi \cdot \sin\alpha - \sin\alpha \cdot \varphi \cdot \cos\alpha)\mathbf{n}$$

$$= 0$$

$$\mathbf{v}' = \cos\alpha\, \mathbf{e}' - \sin\alpha\, \mathbf{b}' = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\varphi \cdot \mathbf{n}$$

$$= \varphi \mathbf{w}$$

* $g' = g\Lambda$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi \\ 0 & \varphi & 0 \end{pmatrix}$

交代性

$g \in SO(3)$

$\Rightarrow \Lambda$: 交代

$g = JB$

$Ag = (AJ)B$

$\in SO(3)$

$\mathbb{R}^3$の回転

(合同変換)

$u' = 0 \to u = \text{const}$ $|u| = 1$

必要なら $\gamma \mapsto A\gamma$ ($A \in SO(3)$) として

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

としてよい

$v, w \in u^{\perp}$ $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -\eta \\ \xi \end{pmatrix}$ とおけば

$\xi^2 + \eta^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

平面曲線の Frenet 方程式

とける?

$$\xi = \cos \int_{s_0}^{s} \varphi(u)\,du$$

$$\eta = \sin \int_{s_0}^{s} \varphi(u)\,du$$

(u, v, w)

$e = \sin\alpha\, u + \cos\alpha\, v$

"γ'"

$\gamma = \int e$

問題

$\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\Sigma := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 2z - x^2 = 0\} \cap \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^4 + y^4 = 1\}$$

は「なめらかな空間曲線」を与える．この曲線上の点 ${}^t(1,0,1/2)$ における曲率を求めなさい．

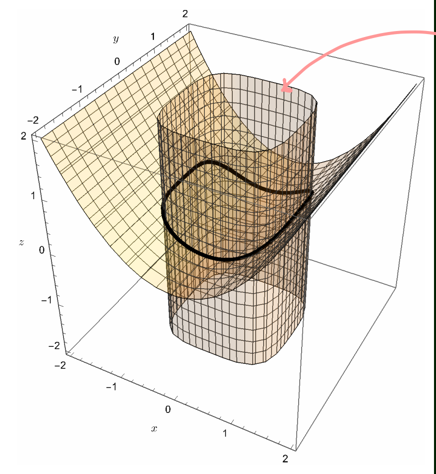
注意

$$\begin{cases} 2z - x^2 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

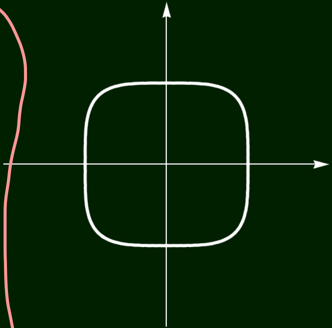
1本の方程式は
一般に 曲面
(2次元)
$3-1=2$

$3-2=1$ 曲線

問題 6-2



$2z - x^2 = 0$



$\{(x, y); x^4 + y^4 = 1\}$

z

$\gamma(s) = {}^t\big(x(s),\ y(s),\ z(s)\big)$: 弧長表示

$\cdot = \dfrac{d}{ds}$

① $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$

② $2z - x^2 = 0$

③ $x^4 + y^4 - 1 = 0$

$$\boxed{(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) = ?}$$

$\boxed{\text{rank } 2}$

$\dot{②}$ $2\dot{z} - 2x\dot{x} = 0$

$\dot{③}$ $4x^3\dot{x} + 4y^3\dot{y} = 0$

$$\begin{pmatrix} -x, & 0, & 1 \\ x^3 & y^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-y^3\\ x^3\\ xy^3\end{pmatrix} \qquad \lambda^2 \overset{①}{=} \frac{1}{x^2y^6 + x^6 + y^6}$$

$$②' = \quad 2\ddot z - 2\dot x^2 - 2x\ddot x = 0$$

$$③' \quad 3x^2\dot x^2 + 3y^2\dot y^2 + x^3\ddot x + y^3\ddot y = 0$$

$$\downarrow \quad (x, y, z) \mapsto (\dot x, \dot y, \dot z)$$

$$1, \ 0, \ 1$$

$$①' \quad x\ddot x + y\ddot y + z\ddot z = 0$$

$$\begin{pmatrix}\ddot x\\ \ddot y\\ \ddot z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x, y, z \\ \text{and}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\ \end{pmatrix}$$