幾何学概論第一 (MTH.B211)

陰関数定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/11/24

問題 6-1

問題

弧長によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率 κ と捩率 τ が，正の値を持つ s の C^∞-級関数 $\varphi(s)$ および定数 $\alpha \in [0, \pi/2)$ を用いて

$$\kappa(s) = (\cos\alpha)\varphi(s), \qquad \tau(s) = (\sin\alpha)\varphi(s)$$

と表されているとする．このとき，γ のフルネ枠 $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$

$$\boldsymbol{u} := (\sin\alpha)\boldsymbol{e} + (\cos\alpha)\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{v} := (\cos\alpha)\boldsymbol{e} - (\sin\alpha)\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{w} := \boldsymbol{n}$$

とおいて $\mathcal{G} := (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ と書くことにする．

1. 各 s に対して $\mathcal{G}(s) \in \mathrm{SO}(3)$ であることを確かめなさい．
2. $\mathcal{G}' = \mathcal{G}\Lambda$ を満たす行列 Λ を求めなさい．
3. $\gamma(s)$ を φ と α を用いて表しなさい．

問題 6-2

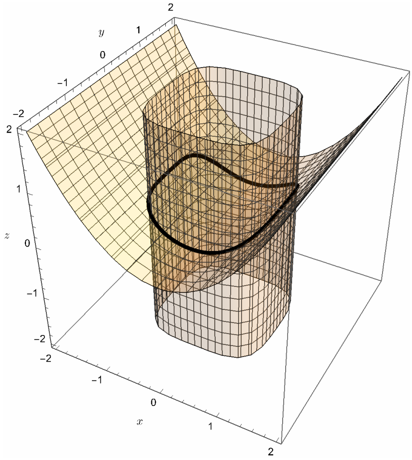
問題

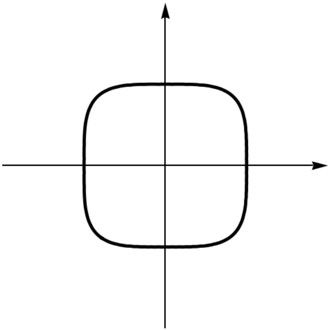
$\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\Sigma := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\,2z - x^2 = 0\} \cap \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\,x^4 + y^4 = 1\}$$

は「なめらかな空間曲線」を与える．この曲線上の点 ${}^t(1,0,1/2)$ における曲率を求めなさい.

問題 6-2





$$\{(x,y); x^4 + y^4 = 1\}$$