幾何学概論第一 (MTH.B211)

陰関数定理

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp
http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/11/24

逆写像定理

$f: \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\ni P}{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$　　C^∞

$U \subset \mathbb{R}^n$

$\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(P) \neq 0$

$\Rightarrow \exists V$: nbd of P s.t.

$f|_V : V \longrightarrow f(V) \subset \mathbb{R}^n$: 微分同相

(全単射
$f^{-1}: C^\infty$)

$n=1$.
$f' \neq 0$
$\Rightarrow$ 逆がある

$n \geq 2$
局所的に
しか不.

定理 (陰関数定理；定理 7.1)

$F(x) = 0$

: x_n について 解ける

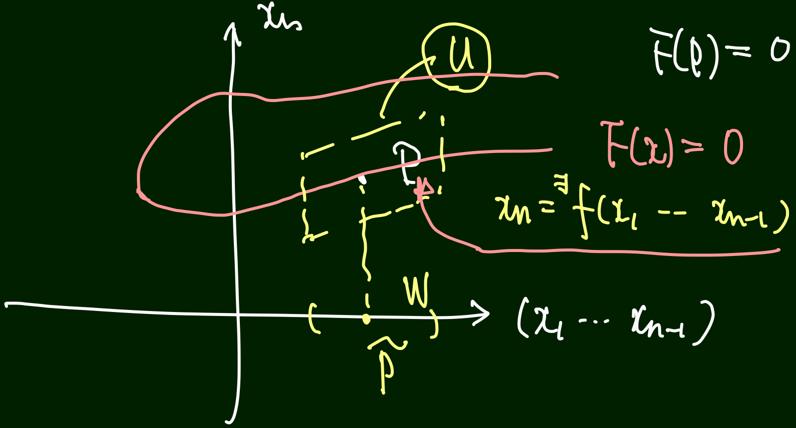
- $F\colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^2$: C^∞
- $F(\mathrm{P}) = 0$, $\partial F/\partial x^n(\mathrm{P}) \neq 0$ $(\mathrm{P} \in U)$

$\left(\dfrac{\partial F}{\partial x^{n-1}}, \dfrac{\partial F}{\partial x^n}\right)$: rank = 2

$\Rightarrow$

1. $\exists V \subset U$：$\mathrm{P} = {}^t(p_1, \dots, p_n)$ の近傍
2. $\exists W$：$\widetilde{\mathrm{P}} := {}^t(p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ の近傍
3. $\exists f\colon W \to \mathbb{R}$：$C^\infty$ s. t.

$$\{\mathrm{Q} \in V \,;\, F(\mathrm{Q}) = 0\}$$
$$= \left\{{}^t\big(x_1 \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})\big) \,;\, {}^t(x_1, \dots, x_{n-1}) \in W\right\}.$$



x_n
U
$F(p) = 0$
P
$F(x) = 0$
$x_n = {}^{\exists} f(x_1 \,\text{--}\, x_{n-1})$
W
$(x_1 \cdots x_{n-1})$
$\tilde{p}$

陰関数定理

領域(連結開)

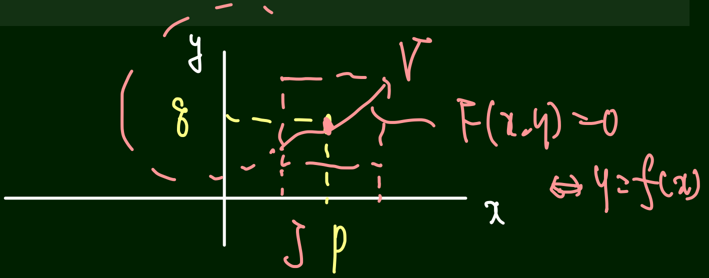
$F(x,y)=0$

定理 (陰関数定理；定理 7.1, $n=2$ の場合)

- $F\colon \mathbb{R}^2 \supset U \ni (x,y) \mapsto F(x,y) \in \mathbb{R}$: C^∞
- $F(p,q)=0$, $F_y(p,q) \neq 0$ $((p,q)\in U)$

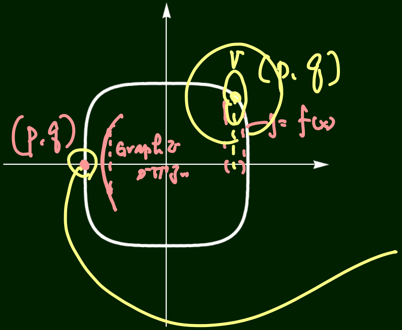
$\Rightarrow \exists V \subset U$: (p,q) の近傍；$\exists J$: p を含む区間；$\exists f\colon J \to \mathbb{R}$: C^∞
with

$$\{\mathrm{P} \in V\,;\, F(\mathrm{Q})=0\} = \left\{ {}^t(x, f(x))\,;\, x \in J \right\}$$



例

$F(x, y) = x^4 + y^4 - 1$



$F_y = 4y^3 \neq 0$ if $y \neq 0$

$F_y = 0$

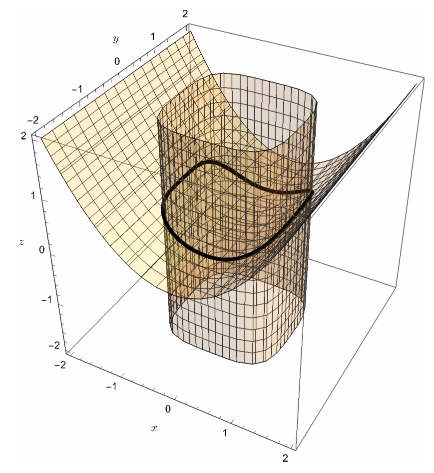
$F_x = 4x^3 \neq 0$

$x = g(y)$ とかける

$(F_x \ F_y) = (0, 0)$

$\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

問題 6-2



$$\{x^4 + y^4 = 1\} \cap \{2z - x^2 = 0\}$$

なめらかな曲線

注意

- $\mathbb{R}^2 \supset C \neq \emptyset$ が，自己交叉のないなめらかな曲線である
  $\Leftrightarrow$
  $\forall \mathrm{P} \in C$, $\exists V \subset \mathbb{R}^2$: P の近傍 s.t.
  $C \cap V$ が，区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級関数
  $f\colon J \to \mathbb{R}$ のグラフ $\{{}^t(x, f(x))\,;\, x \in J\}$ と合同.
- $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^2$ がパラメータ表示されたなめらかな曲線
  $\Leftrightarrow$
  $\forall t_0 \in J\,;\, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $\gamma(J')$ が自己交叉のないなめらかな曲線
  ($J' := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$)

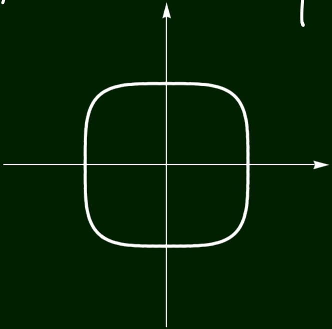
なめらかな曲線

定理

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ に対して $C := F^{-1}(\{0\}) = \{\mathrm{P} \in U \,;\, F(\mathrm{P}) = 0\} \neq \emptyset$ とする．C 上の各点 P で $dF(\mathrm{P}) := \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial F}{\partial y}(\mathrm{P})\right) \neq \mathbf{0}$ が 成り立つならば C は自己交叉のないなめらかな曲線である．

例

$C = \{ F(x,y) = x^4 + y^4 - 1 \}$



$(F_x, F_y) = (4x^3, 4y^3)$

$= (0, 0)$

$\iff (x,y) = (0, 0) \notin C$

自己交叉のない なめらかな曲線

例 7.5

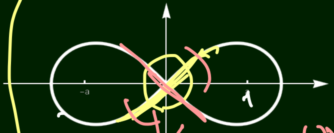
Lemniscate

$G = \{$

- $F_1(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0\}$
- $\gamma_1(t) = {}^t\left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t}\right)$

((0.0) の近くで graph でかけない)

自己交叉のない なめらかな曲線 ではない



パラメータのとりかたから

なめらかな曲線

$((F_1)_x, (F_1)_y)(0,0) = (0,0)$

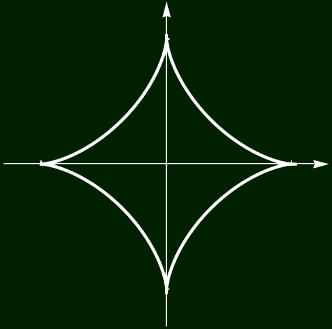
$\cap$

C_1

例 7.5

astroid

- $F_2(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2$
- $\gamma_2(t) = {}^t(\cos^3 t, \sin^3 t)$



陰関数の微分

定理

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が点 $\mathrm{P} \in U$ において $F(\mathrm{P}) = 0$ かつ $F_y(\mathrm{P}) \neq 0$ を満たすとき，P の近傍 V において $F^{-1}(\{0\}) \cap V$ は C^∞-級関数のグラフ $y = f(x)$ で表示される．このとき

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}, \qquad f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

が成り立つ．ただし F_x, ...はそれらの $(x, f(x))$ における値を表す.

例題

問題

なめらかな曲線 $\{x^4 + y^4 = 1\}$ の点 (a, b) における曲率を求めよ.

$$\kappa = \pm \left. \frac{3x^2y^2}{\sqrt{x^6+y^6}} \right|_{(x,y)=(a,b)}$$

ご聴講ありがとうございました

本日の提出課題はありません

「学修アンケート」よろしく