幾何学概論第一 (MTH.B211)

陰関数定理

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2022/geom-1/

東京工業大学理学院数学系

2022/11/24

陰関数定理

定理 (陰関数定理；定理 7.1)

- $F \colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$: C^∞
- $F(\mathrm{P}) = 0$, $\partial F/\partial x^n(\mathrm{P}) \neq 0$ ($\mathrm{P} \in U$)

$\Rightarrow$

1. $\exists V \subset U$：$\mathrm{P} = {}^t(p_1, \ldots, p_n)$ の近傍
2. $\exists W$：$\widetilde{\mathrm{P}} := {}^t(p_1, ; p_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ の近傍
3. $\exists f \colon W \to \mathbb{R}$：$C^\infty$ s. t.

$$
\begin{aligned}
&\{\mathrm{Q} \in V\,;\, F(\mathrm{Q}) = 0\} \\
&= \left\{ {}^t\bigl(x_1 \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1})\bigr)\,;\, {}^t(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in W \right\}.
\end{aligned}
$$

陰関数定理

定理 (陰関数定理；定理 7.1, $n=2$ の場合)

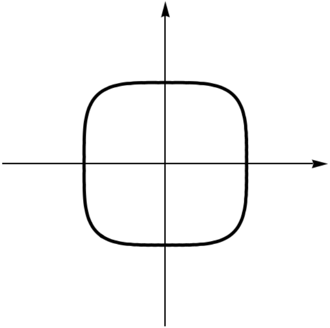
- $F\colon \mathbb{R}^2 \supset U \ni (x,y) \mapsto F(x,y) \in \mathbb{R}$: C^∞
- $F(p,q)=0$, $F_y(p,q) \neq 0$ $\bigl((p,q) \in U\bigr)$

$\Rightarrow \exists V \subset U$：$(p,q)$ の近傍；$\exists J$：p を含む区間；$\exists f\colon J \to \mathbb{R}$：$C^\infty$
with

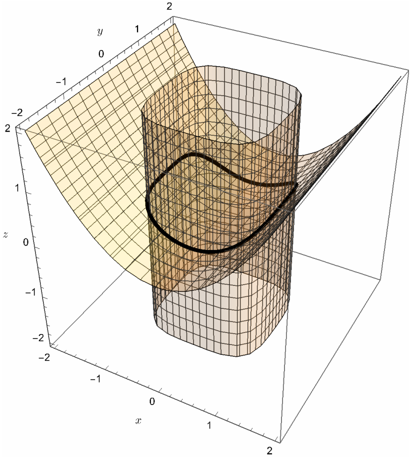
$$\{\mathrm{P} \in V\,;\, F(\mathrm{Q}) = 0\} = \left\{{}^t\bigl(x, f(x)\bigr)\,;\, x \in J\right\}$$

例

$$F(x, y) = x^4 + y^4 - 1$$



問題 6-2



$$\{x^4 + y^4 = 1\} \cap \{2z - x^2 = 0\}$$

なめらかな曲線

注意

- $\mathbb{R}^2 \supset C \neq \emptyset$ が，<u>自己交叉のないなめらかな曲線</u>である
  $\Leftrightarrow$
  $\forall \mathrm{P} \in C$，$\exists V \subset \mathbb{R}^2$：P の近傍 s.t.
  $C \cap V$ が，区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級関数
  $f\colon J \to \mathbb{R}$ のグラフ $\{{}^t(x, f(x))\,;\, x \in J\}$ と合同.
- $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^2$ がパラメータ表示された<u>なめらかな曲線</u>
  $\Leftrightarrow$
  $\forall t_0 \in J$；$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\gamma(J')$ が自己交叉のないなめらかな曲線
  ($J' := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$)

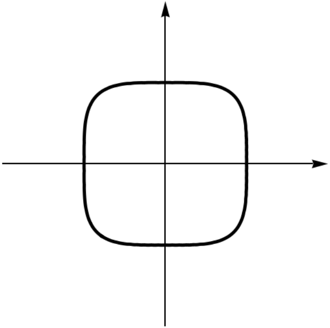
なめらかな曲線

定理

$\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ に対して $C := F^{-1}(\{0\}) = \{\mathrm{P} \in U\,;\, F(\mathrm{P}) = 0\} \neq \emptyset$ とする．C 上の各点 P で $dF(\mathrm{P}) := \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial F}{\partial y}(\mathrm{P})\right) \neq \mathbf{0}$ が 成り立つならば C は自己交叉のないなめらかな曲線である．

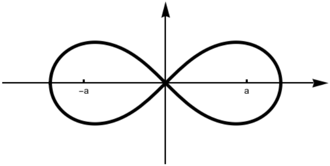
例

$$F(x,y) = x^4 + y^4 - 1$$



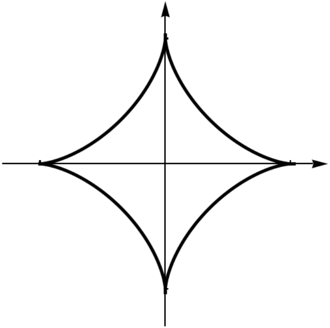
例 7.5

- $F_1(x,y) = (x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)$
- $\gamma_1(t) = {}^t\left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t}\right)$



例 7.5

- $F_2(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2$
- $\gamma_2(t) = {}^t\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$



陰関数の微分

定理

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が点 $\mathrm{P} \in U$ において $F(\mathrm{P}) = 0$ かつ $F_y(\mathrm{P}) \neq 0$ を満たすとき，P の近傍 V において $F^{-1}(\{0\}) \cap V$ はC^∞-級関数のグラフ $y = f(x)$ で表示される．このとき

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}, \qquad f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

が成り立つ．ただし F_x, …はそれらの $(x, f(x))$ における値を表す.

例題

問題

なめらかな曲線 $\{x^4+y^4=1\}$ の点 (a,b) における曲率を求めよ.