2022 年 11 月 24 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 7

■お知らせ

- 38 件/登録者 53 名の課題提出がありました．フィードバックは T2SCHOLA.
- 今回が最終回となります．ご聴講ありがとうございました.「幾何学概論第二」受講の方は引き続きよろしくお願い申し上げます.
- 今週は提出すべき課題はありません．得点合計は 24 日までに T2SCHOLA にてお知らせします.
- 前回予告したように，12 月 1 日に定期試験を実施します．24 日までに T2SCHOLA の「定期試験」セクションに座席表をおきますので事前に確認してください.

■前回の補足

- 問題 6-1 の $\mathcal{G}$ をフルネ枠と見ると曲率が零となってしまう，というご質問がありましたが，$\mathcal{G}$ はフルネ枠ではありません．問題によってはフルネ枠以外の枠をとることもある，というコメントを以前したと思いますが，その実例.
- 空間閉曲線に全曲率・全捩率などは定義できないか，というご質問を複数いただきました．定義はもちろんできますが，その値は 2π の整数倍にはなりません（既出).

■前回までの訂正

- 講義資料 6, 7 ページ 1 行目：$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}'$
- 映写資料 B，黒板 B，1 ページ：$\boldsymbol{b}(s) = \frac{-a}{|a|c}\left(\sin\frac{s}{c}, -b\cos\frac{s}{c}, a\right) \Rightarrow \boldsymbol{b}(s) = \frac{a}{|a|c}\left(\sin\frac{s}{c}, -b\cos\frac{s}{c}, a\right)$
- 黒板 C，最終ページ：課題の提出期限が 11 月 14 日になっていたようです.

■授業に関する御意見

- 曲線論が楽しくない．講義形式が極めて自分に合わない．あまりにも辛かった．もうやりたくないが，こんなことで挫折していては先が思いやられる上，単位数が不安になる．　**山田のコメント：**申し訳ありません．合わなかったですか.
- (3) には 7 時間ほど取りくみ A4 用紙 2 枚半（5 ページ）埋め尽くしましたが，堂々巡りでついにわかりませんでした．真面目にとりくんできたつもりだったのですが，センスなしだったようです．/ 今回の課題の問題 1, あとは微分方程式を解けばいいというところ (3) まで追い込んだのですが, 解き方が分からなくて撃沈しました．/ 微分方程式を使わずにゴリ押しで解いてしまいました．第一積分は調べて理解したのですが，どこで使うのかわかりませんでした.
  山田のコメント：$\mathcal{G}$ の第一列が定ベクトル，第二列，第三列がそれに直交する平面の正規直交基となることに気づけば簡単.
- 自分が分かっていないことが分かりました．　**山田のコメント：**ヨシ！（何が？）
- 質問が多くてすみません．　**山田のコメント：**いいえ．いつも示唆的な質問をありがとうございます.
- 課題の問題のスペースが足りなく，一部省略した部分がありますがお許しを ....　**山田のコメント：**狭くて申し訳ありません.
- 試験に向けていろいろ対策したいところですが，日々のレポートをやるのが精一杯です．まだ幾何学の過問（山田注；過去問のことか）を見ていないので，早くみてなんとか単位がとれるように頑張りたいです．　**山田のコメント：**みてね.
- 試験がんばります．　**山田のコメント：**よろしく.
- もしかして，テストの珍解答的なものもするのでしょうか．　**山田のコメント：**いまのところ予定していません.
- 自分で点数を決められるのは 1995 年京大後期と似てるきもします．　**山田のコメント：**なるほど，あれね.
- 成績の重みを自分で決めるのではなく，例の評価式の a に関する max をとってほしいです．　**山田のコメント：**なんで？
- ブーケの公式の h^3 の項を見ることで，「捩率が接触平面から離れる速さを表している」のような説明を納豆することができました．　**山田のコメント：**よかった.
- 楽しかったです．ありがとうございました．　**山田のコメント：**こちらこそ.
- 先生の授業が楽しいと感じられていることに，少し驚きました．大学の教授の方はメインは自分の研究で，授業はサブのような位置かと思っていました．自分の時間と労力を学生のために使っていることが（私がいうことでは全くないですが）素晴らしいことだと思います．ありがとうございます．　**山田のコメント：**こちらこそありがとうございます．蓄積があるのでそれほど時間・労力を使っているわけではないです．多くの先生は授業・演習・研究指導で真面目に学生に向き合っていると思います.

質問と回答

質問 1：　フルネの公式およびフルネ・セレの公式は公式であり，曲率および捩率の定義からなるフルネ枠と曲率，捩率の関係を行列の形で整理したもので，この公式によって曲率，捩率を定義している訳ではないですか?

お答え：　講義資料 2 では，平面曲線の曲率をフルネの公式で定義した．$\mathbb{R}^3$ のときは枠，曲率，捩率をフルネ・セレの公式で一度に定義している，とみなしてもよい.

質問 2： 高次元のフルネセレの公式についてですが、正の値をとる C^∞ 関数を与えたときにそれらを曲率関数に持つ曲線が存在することはわかっても，それが具体的に表示できなければあまり調べられそうな気がします.

お答え： そうですか？ 曲線を決める微分方程式が完全にわかっているのだから，曲線の性質はわかるはずでは？

質問 3： 系 5.7 の証明について，次のように考えてみました（以下略） **お答え：**「曲率，捩率が一定ならつるまき線」というやつですね. (1) つるまき線は曲率・捩率が一定 (2) 空間曲線の基本定理の一意性ですね.

質問 4： 空間曲線の基本定理の一意性がわからないですと質問しようとしましたが，前の資料にあった平面曲線の基本定理についての質問回答を参考にしたらできました.（以下略） **お答え：**そう.

質問 5： 一般に空間曲線の具体的な表式が与えられるための条件が存在するのでしょうか．今回のように SO(3) に属する行列を用いた回転変換によって，フルネ枠の正規直交基底を，s に依らないベクトルを含む正規直交基底に変換することができる (定傾曲線ならできる?) という条件だけでは，不十分そうです．また, 回転変換で s に依らないベクトルを 2 つ含む正規直交基底に変換することができた場合, それはある 1 つの面内に留まる曲線になるのでしょうか. **お答え：**「定傾曲線ならできる？」は，はい．後半：直線になってしまいませんか？

質問 6： (9) 式（注：問題の解答にある）で与えられた空間曲線の表式は, xy 平面へ射影すると, 曲率関数 $\kappa(s) = -\varphi(s)$ を持つ平面曲線を $\cos\alpha$ 倍 (定数倍) したものと一致します．この平面曲線を決める φ は, κ と τ の比には現れてこないため，任意の平面曲線に対して, それをある平面への射影に持つ定傾曲線が得られると思います．このような定傾曲線は，例えば，上で述べたような平面曲線のある平面を y としたときには，z 成分が s の 1 次関数で表される, 螺旋のように一方方向に進んでいく形に限られるのでしょうか. **お答え：**問題 5-1 ではどうなっていた?

質問 7： 向きを反転する合同変換で，曲率は保たれ，捩率の符号は変わる（山田注：このことを証明してくれました). 空間曲線において，捩率をそのままで曲率の符号を逆転させる変換はあるのか. **お答え：**曲率は定義より正.

質問 8： 空間曲線に対して，接球面のようなものを考えたとき，その球面への射影を考えることはありますか？

お答え： 接球面をどう定義しましょうか．定義されてしまえば射影を考えるのは自然ですよね（中心射影？）

質問 9： 曲率は一意に定まるという説明に，フルネ枠を用いた線形常微分方程式を解くという手法が使われていましたが，一般に線形常微分方程式が解はない場合はないですか. / 微分方程式の解について，存在や一意性を保証する条件とはどのようなものですか. **お答え：**常微分方程式の基本定理（講義資料 6, 定理 6.1）ではどう言っている？

質問 10： 平面曲線の基本定理の証明で，初期条件が $A \in \mathrm{SO}(2)$ や I となる絵画存在するとしていますが，存在しない場合はないのでしょうか. **お答え：**証明に用いるのは 4 つの未知関数に関する線形常微分方程式．常微分方程式の基本定理（講義資料 6, 定理 6.1）は何と言っていますか？

質問 11： 正規形でない常微分方程式では十分小さい区間上でも解が存在しない場合があるのですか.

お答え： よくある例は一意性が成立しない例．自明だが $(x')^2 = -1$ は（実の）解をもたない.

質問 12： 微分方程式の解について，存在や一意性を保証する条件とはどのようなものですか.

お答え： 常微分方程式の基本定理（講義資料 6, 定理 6.1）ではどう言っていますか？

質問 13： $\frac{f'(x+1)}{f'(x)} = 2f(x)$ のように中身がずれているものも常微分方程式として研究されているのでしょうか. **お答え：**これは常微分方程式ではない関数方程式．たとえば「時間遅延のあるロジスティック方程式」などがそう.

質問 14： 微分方程式を解くとき，仮に恒等的に 0 な関数 $y \equiv 0$ も解であるとしても，両辺を y や y^2 でわってよいのは，解の一意性から，計算で出てきた解にも $y = 0$ が含まれるはずだからということで合っていますか.

お答え： いいえ.「どういい加減に解いても，初期条件を満たすものが求まってしまえば，一意性からそれが解」.

質問 15： 微分方程式が非線形のときは解が一意に存在する範囲は J 全体と限らないから，分母が 0 になる場合も考慮しながら解かなければいけないのですか. **お答え：**いいえ．例 6.2 の 3 番目の例は $dy/(y(1-y)) = dt$ とする.

質問 16： 解の存在と一意性について考えてみましたが，かなり辛かったので力学系の本を見てみた.（中略：線形常微分方程式の解の大域的存在の証明） **お答え：**それで結構です．この講義ではユーザーに徹しておきます.

質問 17： 微分方程式の形をみてどこまでも定義域を延長できるのか否かを判定する方法はありますか？（議義（原文ママ）で扱ったものと別のもの） **お答え：**山田は定理として書いたことはないが，十分条件はある.（線形常微分方程式の解の延長可能性の証明をよくみると，線形でなくても適切な評価があれば解が延長できることがわかる).

質問 18： 空間曲線の基本定理のところで，$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega$ を満たす $\mathcal{F}$ が具体的表示をもたないと説明されていたと思うのですが「具体的表示をもたない」というのは初等関数で表せないということですか. **お答え：**いいえ．表現が曖昧ですみません．係数行列 Ω の成分（に初等関数を合成したもの）の積分として表すことができない.

質問 19： 空間曲線では平面曲線のように $\gamma(s)$ の具体的表示をもたない理由はありますか？ **お答え：**第一積分.

質問 20： ブローアップはどのような性質を持つ特異点においてもできますか.

お答え： ブローアップの定義によりますが，ブローアップしても特異点がなくならないこともあります.

質問 21： 人口増加モデルにおけるロジスティック方程式の初期値 $\boldsymbol{a}$ は何でしょうか． **お答え：**$t=t_0$ における人口．

質問 22： (1) logistic という単語を調べると「物流」や「兵站」という意味が出てきたのですが，ロジスティック方程式は元から人口について考えるために考案されたのならば，なぜ logistic という名前がついているのでしょうか/ (2) $y'=0$ であるとき人口は一定になるということになりまうが，そんなことがありうるのでしょうか．(3) ロジスティック方程式の他にも人口を説明するための式などはありますか？

お答え： (1) 理由はわからないらしい．(2) 微分方程式の解としてはありうる．それが現象を表しているかどうかは別．(3) たとえば 稲葉寿「数理人口学入門」，森北出版，2022.

質問 23： SIR モデルでは $\lim_{t\to\infty} I(t)=0$ となりますが，このモデルでは定常状態や周期的な流行は説明できないということですか？ **お答え：**はい．

質問 24： 6-1 の (3) は $\boldsymbol{v}=(\cos\theta(s),\sin\theta(s),0)$ や $(\cos\theta(s),0,\sin\theta(s))$ としても曲率，捩率は条件を満たすと思うのですが，$\boldsymbol{v}$ は初期条件によってどれか一つに定まるということなのでしょうか． **お答え：**はい．

質問 25： 問題 6-1 の課題では $\gamma\mapsto A\gamma+\boldsymbol{a}$ の変換により答えが無限にあると思うが，A や $\boldsymbol{a}$ をすぐに判断できる方法はあるのか？ **お答え：**いいえ．この問題の答えは無限個あります．

質問 26： $\kappa(s)$, $\tau(s)$ が与えられて，それを曲率，捩率にもつ曲線を求める場合，初期値を定めてから求めるのが一般的でしょうか． **お答え：**考える問題による．任意性があると混乱するので初期値を決めるとわかりやすい．

質問 27： 問題 6-2 のように，空間曲線を平面に射影して得られる平面曲線の加速度ベクトルをそれぞれ考えて，そこから元の空間曲線の加速度ベクトルないし曲率を求めるということは一般にできますか．

お答え： 2 つの平面への正射影の加速度ベクトルを考えると，もとの曲線の加速度ベクトルはそれらの和になるとは限らない．実際，$\mathbb{R}^3$ は 2 つの 2 次元部分空間の直和にはならない．

質問 28： 課題 3-2 (2) で思いついたやり方が $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-p^+)^2+(\beta-q^+)^2=(\alpha-p^-)^2+(\beta-q^-)^2$ より $\alpha=\frac{p^{+2}q^- - p^{-2}q^+ + q^{+2}q^- - q^{-2}q^+}{2(p^+q^- - p^-q^+)}$, $\beta=\frac{p^{+2}p^- + q^{+2}p^- - p^{-2}p^+ - q^{-2}p^+}{2(q^+p^- - q^-p^+)}$ で $\varepsilon\to 0$ の極限を求めるという方法しか思いつかず，しかも $p^\pm$, $q^\pm\to 0$ より極限も求められませんでした．他に良い方法があるのでしょうか．

お答え： 講義で説明したのは少し違う方法ですが，この形でもできそうですね．確かに $p^\pm$, $q^\pm\to 0$ ですが，α,β の表示式の分母も分子も 0 に行く「不定形」ですね．ということは「ロピタルの定理」を検討するのがよさそう．$p^\pm$, $q^\pm$ の微分の情報はすでに前の問題で与えてありますね．

質問 29： 課題 5-2 で $\tilde{\gamma}(s)=(1-\lambda\kappa\boldsymbol{e})+\lambda\tau\boldsymbol{b}$ と $\tilde{\gamma}''(s)=\lambda(-\kappa'\boldsymbol{e}+\tau'\boldsymbol{b})$ が一次独立であるため $\kappa'\neq 0$ としていたが，$\kappa'=0$ でも $\tilde{\gamma}(s)=(1-\lambda\kappa\boldsymbol{e})+\lambda\tau\boldsymbol{b}$, $\tilde{\gamma}''(s)=\lambda\tau'\boldsymbol{b}$ となり一次独立であると思うのですが，なぜ $\kappa'\neq 0$ を課すのですか． **お答え：**条件 $\kappa-\lambda(\kappa^2+\tau^2)=0$ があるので，$\kappa'=0$ なら $\tau'=0$.

質問 30： 授業冒頭の $\int_0^\infty \cos s^{r+1}\,ds$ について，$f(z)=\exp(iz^{r+1})$，線気分ろを中心角 $\pi/(2(r+1)))$ の扇型にとれば，$\int_0^\infty \cos s^{r+1}\,ds=\Gamma(\frac{1}{r+1}+1)\cos\frac{\pi}{2(r+1)}$ が得られる． **お答え：**なるほど．

質問 31： $f(t)$ を $t=0$ で 2 階微分可能であるとき，一般に $\gamma(t)={}^t(t,f(t^p))$ $(p>2)$ のような形で表せる曲線の ${}^t(0,f(0))$ における曲率は必ず 0 になると思ったのですが，これは正しいですか． **お答え：**はい．

質問 32： 平面曲線のフルネの公式の Ω は $\det\Omega=\kappa^2$ で常に 0 とは限らないのに，空間曲線のフルネ・セレの公式の Ω は s によらず $\det\Omega=0$ になっています．今回の授業でフルネ・セレの公式の高次元化の話がありましたが，その話からするとおそらく奇数次元だと常に Ω は行列式が 0 になり，偶数次元だとそうではないのではないかと思います．このことの幾何学的な意味を考えてみましたが，見当がつきませんでした．もし何か意味があるのであれば教えてください． **お答え：**一般に奇数次の交代行列の行列式は 0.

質問 33： 平面曲線の基本定理，空間曲線の—，常微分方程式の— のように「$\sim$ の基本定理」と呼ばれる定理には何か共通点があるのでしょうか．（「$\sim$ に関する準同型定理」などのように） **お答え：**特になさそう．

質問 34： なめらかな曲線はどういった定義でしょうか？ **お答え：**第 6 回講義では定義しない（ので「」をつけた）．

質問 35： 問題 6-1 の $\mathcal{G}$ を用いて新しい曲線 $\tilde{\gamma}$ が作れそうな気がします． **お答え：**一列目が定ベクトルですが．

質問 36： 問題 6-1 で（私の計算が正しいなら）$\boldsymbol{u}'=0$ となりますが，これは $\gamma(s)$ 上の点を $\boldsymbol{u}$ を含む適当な平面へ射影すれば $\boldsymbol{u}\neq 0$ だから円になるということでしょうか． **お答え：**何が円になるのでしょう．

質問 37： SO(2) は $\mathrm{SO}(2)=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \mid \theta\in\mathbb{R}\right\}$ と回転行列のみからなりました．SO(3) でもこれは成り立つのでしょうか？ **お答え：**「これ」とは？「回転行列からなる」ことでしょうか．「3 次の回転行列」のあなたの定義は？

質問 38： 空間曲線では曲線を決定するにあたって曲率に加えて捩率が必要であった．$\mathbb{R}^4$ 上で曲線を決定する場合には更にもう一つパラメータが必要なのか? また帰納的に $\mathbb{R}^n$ 上での曲線の決定には $n-1$ 個のパラメータが必要なのか? **お答え：**講義資料 6，1 ページ「前回の補足」の 4 項目；20221117 黒板 A.pdf の最後の 4 ページ．

7 陰関数定理

■陰関数定理 ここでは特別な場合の陰関数定理のステートメントを述べる．証明は解析学で学ぶ（はず）：

定理 7.1 (陰関数定理)**.** $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が，点 $\mathrm{P} = {}^t(p_1, \dots, p_n) \in U$ において $F(\mathrm{P}) = 0$, $\partial F/\partial x_n(\mathrm{P}) \neq 0$ を満たすならば，U における P の近傍 V，$\mathbb{R}^{n-1}$ における $\widetilde{\mathrm{P}} := {}^t(p_1, \dots, p_{n-1})$ の近傍 W，および C^∞-級関数 $f\colon W \to \mathbb{R}$ が存在して，次を満たす：

$$\{\mathrm{Q} \in V \,;\, F(\mathrm{Q}) = 0\} = \left\{{}^t\big(x_1 \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})\big) \,;\, {}^t(x_1, \dots, x_{n-1}) \in W\right\}.$$

注意 7.2. $\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合 C が，**自己交叉のないなめらかな曲線**であるとは，任意の $\mathrm{P} \in C$ に対して $\mathbb{R}^2$ における P の近傍 V が存在して，$C \cap V$ が，ある区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級関数 $f\colon J \to \mathbb{R}$ のグラフ $\{{}^t(x, f(x))\,;\, x \in J\}$ と合同となることである．

また，区間 $J \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^∞-級写像 $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^2$ がパラメータ表示された**なめらかな曲線**であるとは，各 $t_0 \in J$ に対して t_0 を含む区間 $J' := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$（$\varepsilon > 0$）が存在して $\gamma(J')$ が自己交叉のないなめらかな曲線となることである．

定理 7.3. $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ に対して $C := F^{-1}(\{0\}) = \{\mathrm{P} \in U \,;\, F(\mathrm{P}) = 0\} \neq \emptyset$ とする．C 上の各点 P で $dF(\mathrm{P}) := \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial F}{\partial y}(\mathrm{P})\right) \neq \mathbf{0}$ が 成り立つならば S は自己交叉をもたないなめらかな曲線である．

定理 7.4. 曲線の正則パラメータ表示 $\gamma\colon \mathbb{R} \supset J \to \mathbb{R}^2$ はパラメータ表示されたなめらかな曲線を与える．

例 7.5.
- $F_1(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$；$F_2(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2$.
- $\gamma_1(t) = {}^t\left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}\right)$；$\gamma_2(t) = {}^t\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$.

■陰関数の微分

定理 7.6. 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が点 $\mathrm{P} \in U$ において $F(\mathrm{P}) = 0$ かつ $F_y(\mathrm{P}) \neq 0$ を満たすとき，P の近傍 V において $F^{-1}(\{0\}) \cap V$ は C^∞-級関数のグラフ $y = f(x)$ で表示される．このとき

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}, \qquad f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

が成り立つ．ただし F_x, …はそれらの $(x, f(x))$ における値を表す．

証明： 関数 f の与え方から $F(x, f(x)) = 0$．これを x で微分すると $F_x + F_yf'(x) = 0$．このことから第一の式を得る．さらに第一の式を x の一変数関数として微分すれば第二式が得られる．

系 7.7. 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が $C := F^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ かつ C 上の各点で $dF \neq \mathbf{0}$ を満たすとき，自己交叉をもたないなめらかな曲線 C の点 ${}^t(x, y)$ における曲率の**絶対値**は次で与えられる：

$$\frac{|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2|}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}^{\,3}}.$$

2022 年 11 月 24 日